Smorzamento di una valvola oleodinamica

Dinamica di una valvola oleodinamica a otturatore

Nella progettazione di una valvola occorre trovare il giusto compromesso tra **stabilità e rapidità di risposta**: uno smorzamento insufficiente può provocare oscillazioni e disturbi di pressione, mentre uno smorzamento eccessivo rallenta la risposta della valvola e può causare sovrappressioni a monte.

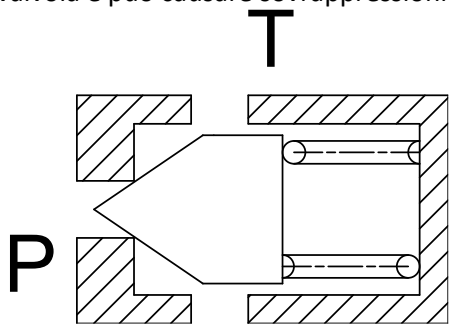


Figura 1: schema di una valvola limitatrice di pressione.

In Figura 1 è rappresentata schematicamente una valvola limitatrice di pressione ad azione diretta, dove P è la linea con il ramo in pressione da controllare e T è la connessione al serbatoio.
Una molla precaricata mantiene l'elemento mobile sulla sede che separa P da T. Quando la **forza generata dalla pressione in P sull'area attiva supera il precarico della molla**, l'elemento si solleva e l'olio viene scaricato verso T, limitando così la pressione.
Durante l'apertura, il movimento dell'elemento comprime anche l'olio presente nella **camera della molla**. Se questo volume fosse completamente chiuso, la sua pressione aumenterebbe rapidamente, generando una forza che **ostacolerebbe la corsa dell'elemento mobile** e quindi la corretta apertura della valvola.
In Figura 1 è visibile tra il diametro esterno dell'elemento mobile e il diametro del corpo valvola una luce di passaggio che ho volutamente ingigantito che in realtà è sempre presente come luce di passaggio "calibrata" che collega il volume che ospita la molla con un altro volume (nel caso è il T).
Tale luce di passaggio è presente:

1) Per evitare il caso del fluido completamente intrappolato che bloccherebbe l'elemento mobile.
2) Per controllare il trasferimento del fluido da e verso quel volume e regolare il transitorio della **contropressione che si determina nella camera della mol**la.

Per lo smorzamento delle valvole in effetti il transitorio accennato al punto 2) è fondamentale poiché in condizioni stazionarie la pressione nella camera della molla nella valvola schematizzata in Figura 1 è la stessa del serbatoio T, ma da un punto di vista dinamico il valore istantaneo di questa pressione influenza tantissimo il comportamento della valvola (oscillazioni e disturbi di pressione se lo smorzamento è insufficiente oppure lentezza nella risposta e sovrapressioni a monte se lo smorzamento è eccessivo).
Dimensionando opportunamente tale luce di passaggio si può ottenere un conveniente smorzamento della valvola.
Se trascuriamo gli attriti di tipo coulombiano, possiamo scrivere la seconda legge di Newton del sistema massa-molla rappresentato in Figura 1:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_e(t) - F_0$$

1: seconda legge di Newton applicata all'elemento mobile di Figura 1.

Dove m è la massa delle parti mobili, b è il coefficiente d'attrito viscoso, k è la costante elastica, F_e è la risultante della forza esterna, F_0 è il precarico della molla, x è la corsa dell'elemento mobile e t è il tempo.
Quindi riscriviamo la [1] come:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e(t) - F_0}{m}$$

Chiamiamo costante di smorzamento [s^{-1}]:

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

2: costante di smorzamento.

E e pulsazione propria [rad/s]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3: pulsazione propria.

Così da poter riscrivere l'equazione come:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_e(t) - F_0}{m}$$

Andremo a definire il coefficiente *b* e quindi *γ* per alcuni casi tipici utilizzati nelle valvole oleodinamiche per produrre smorzamento.

La risultante delle forze esterne, in funzione del tempo, è nel nostro caso, il prodotto della differenza di pressione istantanea nel ramo P e T per l'area attiva con la quale agisce sulla contro-sede dell'otturatore, se trascuriamo le forze di flusso e consideriamo la reazione della camera molla già rappresentata dal termine di smorzamento, nelle ipotesi quasi-stazionarie adottate. Infatti Manring–Fales distinguono forza di pressione, precarico e forza di flusso nella citata equazione.

Dispositivi di smorzamento

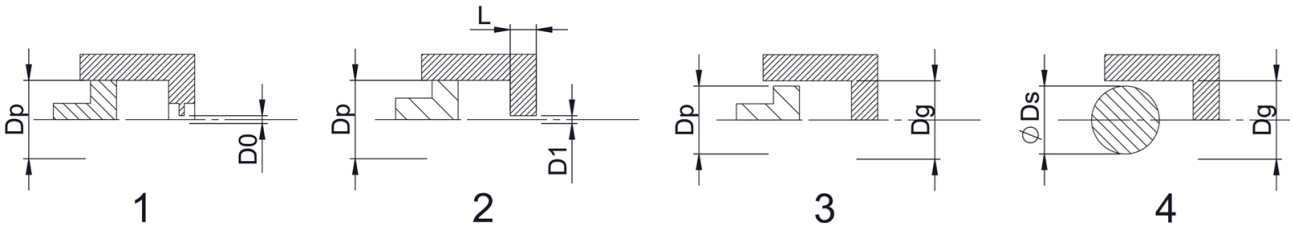


Figura 2: alcuni dispositivi di smorzamento.

In Figura 2 vediamo:

1) Smorzatore a orifizio corto (*Dashpot idraulico a orifizio corto, smorzamento dell'orifizio*).
2) Smorzatore capillare o a orifizio lungo (*long-orifice dashpot, capillary restrictor damping*).
3) Smorzatore a meato anulare con pistone cilindrico (*annular-clearance dashpot, annular-orifice dashpot, linear dashpot*).
4) Smorzatore a meato anulare con pistone sferico (*spherical-piston annular-orifice dashpot*).

In Figura 1 l'olio è connesso tramite due diametri, come nel caso 3) di Figura 2, ma potremmo invece garantire una tenuta perfetta tra diametro esterno della parte mobile e corpo valvola come schematizzato nel caso 1) di Figura 2 e lasciare il deflusso ad un orifizio corto, oppure tramite un orifizio lungo, oppure nel caso di otturatore "a sfera" lasciare che sia la luce tra sfera e corpo valvola a smorzare la valvola, caso 4) di Figura 2.

A dire il vero esistono tantissimi altri modi, ma questi tracciano da un certo punto di vista i capostipiti.

Ad esempio è molto comune accoppiare con gioco stretto come nei casi 1) e 2) e al posto dell'orificio sul corpo valvola ricavare una luce con opportune forature o intagli sul diametro esterno della parte mobile: in questi casi si ricade nei casi come 1) o 2) anche se ovviamente le formule cambiano a seconda dei casi.

Di seguito effettueremo dei calcoli sulla base di determinate ipotesi.

Condizioni/Ipotesi

- **Fluido:** newtoniano, assunto incomprimibile ai fini del moto quasi-stazionario; *K* finita ed elevata quando si considera l'elasticità idraulica.
- **Regime di moto:**
  - **Caso 1 — orifizio corto:** può essere laminare, di transizione o turbolento; il modello a orifizio viene espresso mediante un coefficiente di efflusso (C_d) o (C_q) dipendente, in generale, anche dal Reynolds.
  - **Caso 2 — orifizio lungo / capillare:** laminare, moto di Poiseuille.
  - **Caso 3 — meato anulare con pistone cilindrico:** laminare, con approssimazione di meato sottile / lubrificazione.
  - **Caso 4 — meato anulare con pistone sferico:** moto viscoso lento, regime di Stokes; nel limite di piccolo gioco può essere trattato mediante approssimazione di lubrificazione.
- **Meati sottili:** nei casi 3 e 4 si assume che lo spessore del meato sia molto minore delle dimensioni geometriche caratteristiche del componente, cioè $h / D \ll 1$ per il pistone cilindrico e $h_0 / R \ll 1$ per il pistone sferico. Questa condizione è normalmente soddisfatta nei giochi funzionali delle valvole oleodinamiche e consente di utilizzare l'approssimazione di lubrificazione, trascurando i termini di ordine superiore rispetto al rapporto gioco/dimensione caratteristica.
- **Quasi-stazionarietà:** si trascurano la dinamica dovuta alla comprimibilità del fluido e alla cedevolezza delle camere, nonché gli effetti inerziali non stazionari del fluido; l'approssimazione è appropriata quando la frequenza è sufficientemente bassa rispetto alle dinamiche idrauliche proprie del sistema.
- Si assume inoltre fluido monofase, assenza di cavitazione significativa e pareti rigide con condizione di non-slip.

Orifizio corto

La portata nell'orifizio di diametro D_0, e quindi il Δp, sono:

$$Q = C_d \cdot A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \Delta p} \rightarrow \Delta p = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{Q}{C_d \cdot A_0}\right)^2$$

La seguente legge quadratica viene utilizzata nel campo operativo nel quale C_d può essere assunto approssimativamente costante. A Reynolds molto basso, dove C_d varia sensibilmente, la relazione non va estrapolata fino a $v \rightarrow 0$. Con:

$$Q = A_p \cdot v - \frac{V}{K}\frac{dp}{dt}$$

In **regime stazionario** o quasi-stazionario (basse frequenze) il termine elastico si trascura, quindi $Q \approx A_p \cdot v$.
Dove A_p = area "di spiazzamento" del volume camera molla e cioè la sezione del pistone di diametro D_p.

$$A_p = \pi \cdot \frac{D_p^2}{4}$$

Quindi la caduta di pressione risulta (regime stazionario):

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{A_p \cdot v}{C_d \cdot A_0}\right)^2$$

Forza dissipativa (modulo) che l'otturatore "vede" sulla sua area efficace:

$$|F_A(v)| = A_p \cdot \Delta p = A_p \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{A_p \cdot v}{C_d \cdot A_0}\right)^2 = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{A_p^3}{C_d^2 A_0^2} v^2 = K_R \cdot v^2$$

Con

$$K_R = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{A_p^3}{C_d^2 \cdot A_0^2}$$

Con segno (la forza si oppone al moto):

$$F_A(v) = -K_R \cdot v \cdot |v|$$

(stessa legge, ma esplicita l'anti-parallellismo con v).
Il coefficiente di smorzamento "equivalente", dipendente dalla velocità:

$$b_R(v) = \left|\frac{F_A(v)}{v}\right| = K_R \cdot |v| = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{A_p^3}{C_d^2 \cdot A_0^2} \cdot |v|$$

*4: coefficiente di smorzamento per orificio corto $b_r(v)$, con K_R **costante di resistenza quadratica** del dispositivo.*

Caratteristiche di questo smorzatore:

- Non è costante.
- È un coefficiente "equivalente".
- Cresce **linearmente con $|v|$**.
- È quindi un "**resistore quadratico**" ($F \propto -v \cdot |v|$).

Il coefficiente $b_R(v)$ della [4] è un coefficiente equivalente secante, cioè fornisce alla velocità considerata la stessa forza del resistore quadratico. Per una linearizzazione locale attorno a v_0 va invece usato il coefficiente tangente:

$$b_{tan} = -\left.\frac{dF_A}{dv}\right|_{v_0} = 2K_R|v_0| = 2b_R(v_0)$$

Fonte: **Gao, H., Chi, M., Dai, L., Yang, J., Zhou, X. (2020)** - *Mathematical Modelling and Computational Simulation of the Hydraulic Damper during the Orifice-Working Stage for Railway Vehicles.* - **Mathematical Problems in Engineering**, 2020, Article ID 1830150, 23 pp. DOI: **10.1155/2020/1830150**.

Orifizio lungo (Hagen–Poiseuille) ⇒ lineare

Nell'orificio lungo vale la legge di Hagen-Poiseuille

$$Q = \frac{\pi \cdot D_1^4}{128 \cdot \mu \cdot L} \cdot \Delta p \rightarrow \Delta p = \frac{128 \cdot \mu \cdot L}{\pi \cdot D_1^4} \cdot Q$$

In **regime stazionario** o quasi-stazionario assumiamo ancora Q ≈ A_p·v. Quindi:

$$\Delta p = \frac{128 \cdot \mu \cdot L}{\pi \cdot D_1^4} \cdot A_p \cdot v$$

Quindi:

$$F_A(v) = -A_p \cdot \Delta p = -\frac{128 \cdot \mu \cdot L \cdot A_p^2}{\pi \cdot D_1^4} \cdot v = -K_L \cdot v$$

Infine

$$b_L = \left|\frac{F_A(v)}{v}\right| = K_L = \frac{128 \cdot \mu \cdot L \cdot A_p^2}{\pi \cdot D_1^4}$$

5: coefficiente di smorzamento per orificio lungo b_L, con K_L costante di resistenza del dispositivo.

E si vede che b_L è costante (non dipende da v).
Caratteristiche di questo smorzatore:

- Il coefficiente è indipendente da v.
- Comportamento da smorzatore viscoso ideale.

Fonte: **Nagy-György, P., Hős, C. (2021)** - *Predicting the damping characteristics of vibration dampers employing generalized shear thickening fluids*. - **Journal of Sound and Vibration**, 506, 116116. DOI: **10.1016/j.jsv.2021.116116**.

Gap anulare pistone–cilindro ⇒ lineare

Nel caso 3) il volume trasferisce il fluido tra il gioco radiale h compreso tra i diametri D_g e D_p.

$$h = \frac{D_g - D_p}{2}$$

Poiché nei giochi delle valvole vale $h \ll D_p, D_g$, il meato anulare viene localmente assimilato a un canale piano di larghezza pari alla circonferenza media. In questa approssimazione il contributo di Couette dovuto al moto della parete e le correzioni di curvatura sono di ordine superiore rispetto al termine di Poiseuille dominante.
Il meato anulare si sviluppa per la lunghezza assiale L di sovrapposizione tra pistone e cilindro.
Si ricava dalle eq. di Navier-Stokes, per il gap tra lastre parallele separate da una altezza h:

$$Q = \frac{1}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot b \cdot h^3$$

Dove b è la larghezza del gap.

$$b = \pi \cdot \frac{D_g + D_p}{2}$$

Quindi:

$$Q = \frac{\pi \cdot \left(D_g - D_p\right)^3 \cdot \left(D_g + D_p\right)}{192 \cdot \mu \cdot L} \cdot \Delta p$$

Quindi:

$$F_A(v) = -A_p \cdot \Delta p = -A_p \cdot \frac{192 \cdot L \cdot \mu \cdot \left(A_p \cdot v\right)}{\pi \cdot \left(D_g - D_p\right)^3 \cdot \left(D_g + D_p\right)} = -K_A \cdot v$$

Infine

$$b_A = \left|\frac{F_A(v)}{v}\right| = K_A = \frac{192 \cdot L \cdot \mu \cdot A_p^2}{\pi \cdot \left(D_g - D_p\right)^3 \cdot \left(D_g + D_p\right)}$$

6: coefficiente di smorzamento per meato/gap anulare pistone–cilindro b_A, con K_A costante di resistenza del dispositivo.

Fonte: **Nagy-György, P., Hős, C. (2021)** - *Predicting the damping characteristics of vibration dampers employing generalized shear thickening fluids*. - **Journal of Sound and Vibration**, 506, 116116. DOI: **10.1016/j.jsv.2021.116116**.

Gap sferico sfera–cilindro ⇒ lineare

Nel seguito la sfera è considerata centrata e coassiale con il cilindro; il problema è quindi assialsimmetrico.

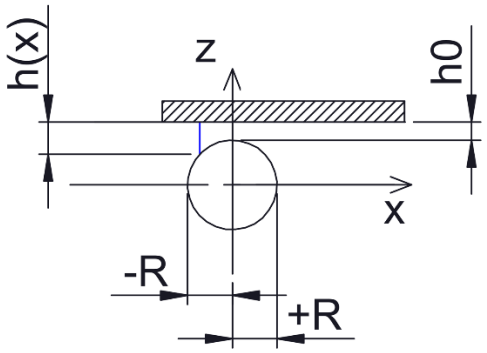


Figura 3: dettaglio del caso Gap sferico sfera–cilindro ⇒ lineare.

In Figura 3, il gioco minimo tra sfera e cilindro è h_0. Poiché nel caso di interesse il meato è molto sottile rispetto al raggio della sfera, quindi $\boldsymbol{h_0 << R}$, la superficie sferica, nella zona prossima al punto di minimo gioco, può essere approssimata localmente con una parabola. Lo spessore del meato varia quindi lungo la coordinata x secondo:

$$h(x) \approx h_0 + \frac{x^2}{2R}$$

7: geometria parabolica nel problema del gap sferico sfera cilindro lineare.

dove *x = 0* corrisponde alla sezione di minimo passaggio.

La condizione $h_0/R \ll 1$ consente di applicare l'**approssimazione di lubrificazione**: le variazioni delle grandezze lungo il meato, cioè nella direzione x, avvengono su una scala molto maggiore dello spessore h. Di conseguenza, nell'equazione della quantità di moto normale al film il gradiente di pressione risulta trascurabile:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0$$

E quindi, a ogni ascissa *x*, la pressione può essere considerata praticamente uniforme attraverso lo spessore del film:

$$p = p(x)$$

Questo **non significa che la pressione sia costante nel meato**: varia lungo *x*, ed è proprio il gradiente

$$\frac{dp}{dx}$$

a determinare il flusso viscoso attraverso il gioco sferico.

Nella geometria globale di Figura , prendendo il centro della sfera come origine (z = 0):

$$z_s(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

È la superficie superiore della sfera, mentre la parete del cilindro è a:

$$z_w = R + h_0$$

Pertanto:

$$h(x) = z_w - z_s(x) = R + h_o - \sqrt{R^2 - x^2}$$

Introduciamo una nuova coordinata locale trasversale al film, ζ:

$$\zeta = z - z_s(x)$$

Così che ζ = 0 sulla superficie della sfera e ζ = h(x) sulla parete del cilindro.

Dopo aver introdotto ζ, esprimiamo più coerentemente l'ipotesi sulla pressione nella coordinata locale:

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} \approx 0$$

Così possiamo scrivere l'equazione di Navier–Stokes ridotta in approssimazione di lubrificazione come:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$

sia d*p*/d*x* sia *h* = *h*(*x*) sono costanti rispetto a ζ.

Nel limite di meato sottile $h_0 / R \ll 1$, le variazioni viscose attraverso il film dominano quelle longitudinali; il moto è quindi governato dal bilancio tra gradiente di pressione d*p* / d*x* e diffusione viscosa trasversale, per questo d*p* / d*x* è detto gradiente di pressione dominante.

A questo punto le condizioni di non-slip, nel riferimento solidale alla sfera, diventano:

$$u(x, \zeta = 0) = 0, \quad u(x, \zeta = h) = -v$$

Integrando una prima volta rispetto a ζ:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\zeta + C_1(x)$$

E integrando una seconda volta:

$$u(x, \zeta) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\zeta^2 + C_1(x)\zeta + C_2(x)$$

Dalla prima condizione di non-slip otteniamo immediatamente $C_2(x) = 0$, mentre dalla seconda condizione:

$$-v = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2 + C_1(x)h$$

Quindi:

$$C_1(x) = -\frac{v}{h} - \frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}$$

Sostituendo:

$$u(x, \zeta) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\zeta^2 - \left(\frac{v}{h} + \frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}\right)\zeta = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\zeta(h - \zeta) - \frac{v}{h}\zeta$$

8: componente della velocità del fluido lungo x nel gap sferico sfera cilindro lineare.

Dove naturalmente *h* = *h*(*x*).

Questa forma è molto significativa perché separa i due contributi:

$$u = u_p + u_C = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\zeta(h - \zeta) - \frac{v}{h}\zeta$$

Con il termine di **Poiseuille** dovuto al gradiente di pressione e il termine di **Couette** dovuto al moto relativo tra le pareti.

Il prossimo passaggio è integrare il profilo in ζ per ricavare la portata locale:

$$q(x) = \int_0^{h(x)} u(x, \zeta) d\zeta$$

Sostituiamo il profilo nella formula:

$$q(x) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h \zeta(h-\zeta)d\zeta - \frac{v}{h}\int_0^h \zeta d\zeta$$

E calcolando i due integrali risulta dal primo $h^3/6$ e dal secondo $h^2/2$.

$$q(x) = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{v\,h(x)}{2}$$

9: la portata locale per unità di circonferenza q(x) nel gap sferico sfera–cilindro lineare.

Poiché il problema è assialsimmetrico, nel limite di meato sottile la portata totale attraverso il restringimento è, al primo ordine,

$$Q \approx 2\pi R q(x)$$

Perché nella zona che domina la resistenza vale $h_0 << R$ e $|x| << R$.

Ossia:

$$q(x) \approx \frac{Q}{2\pi R}$$

A questo punto dobbiamo collegare Q alla velocità *v*.

Nel riferimento del cilindro, assumendo che lontano dalla sfera il liquido non abbia una portata imposta, la sfera che avanza con velocità v sposta un volume pari alla sua area proiettata per unità di tempo.

Equivalentemente, nel riferimento solidale alla sfera il cilindro e il fluido lontano dalla sfera scorrono con velocità $-v$.

La sezione completa del cilindro è

$$A_g = \pi R_g^2$$

Pertanto, nel riferimento solidale alla sfera,

$$Q = -\pi R_g^2 v$$

Questo passaggio è coerente con **Haberman & Sayre**: per studiare una sfera che trasla assialmente in un tubo, essi fissano il riferimento alla sfera e fanno muovere il cilindro con velocità opposta.

Ne segue:

$$q(x) \approx -\frac{\pi R_g^2 v}{2\pi R} = -\frac{R_g^2}{2R}v$$

Oppure, poiché $R_g = R + h_0 \approx R$,

$$q \approx -\frac{Rv}{2}$$

Il passo successivo è sostituire la continuità globale nella relazione locale di lubrificazione, dalla [9], ricavo:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu}{h(x)^3}\left[q(x) + \frac{v\,h(x)}{2}\right]$$

E dal passo precedente $q \approx -R_g^2 \cdot v/(2R)$ sostituendo:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu}{h^3}\left[-\frac{R_g^2}{2R}v + \frac{v\,h}{2}\right] = \frac{6\mu v}{h^3}\left(\frac{R_g^2}{R} - h\right)$$

Poiché $R_g = R + h_0$ allora:

$$\frac{R_g^2}{R} = \frac{(R+h_0)^2}{R} = R + 2h_0 + \frac{h_0^2}{R}$$

Nel meato che domina la perdita di pressione abbiamo $h \sim h_0 << R$, pertanto:

$$\frac{R_g^2}{R} - h \approx R$$

Al primo ordine della teoria di lubrificazione otteniamo quindi:

$$\frac{dp}{dx} \approx \frac{6\mu R v}{h^3}$$

10: gradiente di pressione dominante nel gap sferico sfera–cilindro lineare.

Questo risultato è interessante: il contributo di Couette è stato correttamente mantenuto, ma nel limite

$$\frac{h_0}{R} \ll 1$$

Risulta di ordine inferiore rispetto alla portata che deve attraversare il restringimento.

Adesso inseriamo la geometria parabolica, cioè la [7], ottenendo:

$$\frac{dp}{dx} \approx \frac{6\mu R v}{\left(h_0 + \frac{x^2}{2R}\right)^3}$$

Il passo successivo è integrare il gradiente di pressione lungo il restringimento.

E quindi:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{dx} dx \approx 6\mu R v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(h_0 + \frac{x^2}{2R}\right)^3} dx$$

Introduciamo la variabile adimensionale

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{2Rh_0}}$$

Da cui:

$$x = \sqrt{2Rh_0}\xi, \quad dx = \sqrt{2Rh_0} d\xi$$

Inoltre:

$$h_0 + \frac{x^2}{2R} = h_0(1 + \xi^2)$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(h_0 + \frac{x^2}{2R}\right)^3} dx = \frac{\sqrt{2Rh_0}}{h_0^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\xi^2)^3} d\xi$$

L'ultimo integrale a destra, quello in ξ fornisce come risultato 3π/8.

Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(h_0 + \frac{x^2}{2R}\right)^3} dx = \frac{3\pi\sqrt{2R}}{8h_0^{5/2}}$$

Sostituendo nella Δp:

$$\Delta p \approx 6\mu R v \frac{3\pi\sqrt{2R}}{8h_0^{5/2}}$$

Da cui:

$$\Delta p \approx \frac{9\pi}{4} \frac{\mu R\sqrt{2R}}{h_0^{5/2}} v = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4} \mu \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} v$$

11: Δp nel gap sferico sfera–cilindro lineare.

Quindi già qui emerge la cosa importante:

$$\Delta p \propto v$$

E dunque il comportamento resta lineare nella velocità, come ci aspettavamo dal regime di Stokes/lubrificazione.

Ora dobbiamo trasformare questa caduta di pressione nella forza assiale sulla sfera. Qui conviene non postulare F = A·Δp, ma ricavarlo dalla pressione agente sulla superficie sferica.

Indichiamo con *x* la coordinata assiale, con origine nel centro della sfera. Su una fascia della superficie sferica:

$$n_x = \frac{x}{R}$$

È la componente assiale della normale, mentre l'area della fascia compresa tra *x* e *x*+d*x* vale:

$$dA = 2\pi R dx$$

La componente assiale elementare della forza di pressione è quindi:

$$dF_{p,x} = -pn_x dA = -2\pi p(x) x\, dx$$

Integrando sull'intera sfera:

$$F_p = -2\pi \int_{-R}^{R} p(x) x\, dx$$

Usiamo

$$d(R^2 - x^2) = -2x\, dx$$

Si ottiene, per integrazione per parti:

$$F_p = -\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \frac{dp}{dx} dx$$

Perché il termine al contorno si annulla essendo $R^2 - x^2 = 0$ per $x = \pm R$.

Ora entra l'approssimazione di lubrificazione. Il gradiente di pressione è concentrato nella zona del minimo gioco, la cui estensione caratteristica è:

$$|x| \sim \sqrt{R h_0} \ll R$$

Pertanto, nella zona che fornisce il contributo dominante,

$$R^2 - x^2 \approx R^2$$

Quindi:

$$F_p \approx -\pi R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{dx} dx = -\pi R^2 \Delta p$$

Ecco quindi perché, al primo ordine della teoria di lubrificazione, compare proprio l'area proiettata della sfera $A_{eff} = \pi \cdot R^2$.

Sostituiamo ora la Δp trovata allo step precedente:

$$F_p(v) \approx -\pi R^2 \left[\frac{9\pi\sqrt{2}}{4} \mu \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} v \right] = -\frac{9\pi^2\sqrt{2}}{4} \mu \frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}} v = -K_S v$$

Da cui, abbiamo definito, per il contributo dominante di pressione:

$$K_S = \frac{9\pi^2\sqrt{2}}{4} \mu \frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}}$$

Quindi

$$F \propto v$$

Ossia il comportamento è lineare nella velocità.

C'è però ancora un passaggio prima di dichiarare K_S coefficiente di smorzamento totale: sulla sfera agisce anche lo **sforzo viscoso tangenziale**. Nella teoria di lubrificazione il contributo di pressione appena calcolato è quello dominante per $h_0/R \to 0$, mentre lo shear è di ordine inferiore; al prossimo step conviene dimostrarlo e stabilire se possiamo trascurarlo in modo controllato. Haberman e Sayre, nella soluzione generale di Stokes per una sfera rigida in un tubo, calcolano infatti il drag totale integrando sia le tensioni normali sia quelle tangenziali sulla sfera; Nella formulazione esatta del problema di Stokes sfera–cilindro, scrivono infatti il drag totale come somma di tangential drag e normal drag. Nell'Appendice D calcolano separatamente i due contributi integrando le tensioni sulla superficie della sfera.

Avevamo ottenuto la [8], che deriviamo rispetto a ζ:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h - 2\zeta) - \frac{v}{h}$$

Sulla superficie della sfera abbiamo ζ = 0, perciò:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = -\frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{v}{h}$$

La tensione tangenziale esercitata dal fluido vale quindi:

$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx} - \frac{\mu v}{h}$$

Con il termine di **Poiseuille** dovuto al gradiente di pressione e il termine di **Couette**.

Ora utilizziamo il gradiente di pressione dominante [10], così otteniamo:

$$\tau_s \approx -\frac{h}{2}\frac{6\mu R v}{h^3} - \frac{\mu v}{h} = -\frac{3\mu R v}{h^2} - \frac{\mu v}{h}$$

Nella regione di lubrificazione

$$|x| \sim \sqrt{R h_0} \ll R$$

La superficie sferica è quasi parallela all'asse *x* nella regione di lubrificazione; pertanto, al primo ordine, la componente assiale della trazione tangenziale coincide con τ_s. Per una fascia sferica compresa tra *x* e *x* + d*x*, l'area vale esattamente:

$$dA = 2\pi R dx$$

La forza tangenziale assiale risulta:

$$F_\tau \approx 2\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_s dx$$

Sostituendo:

$$F_\tau \approx -6\pi\mu R^2 v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2} dx - 2\pi\mu R v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} dx$$

Gli integrali, tenuto conto che h è dato dalla [7], sono:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2} dx = \frac{\pi\sqrt{2R}}{2h_0^{3/2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} dx = \frac{\pi\sqrt{2R}}{h_0^{1/2}}$$

Quindi

$$F_\tau \approx -3\pi^2\sqrt{2}\mu v \frac{R^{5/2}}{h_0^{3/2}} - 2\pi^2\sqrt{2}\mu v \frac{R^{3/2}}{h_0^{1/2}}$$

Il rapporto del termine tangenziale dominante rispetto alla pressione è:

$$\frac{|F_{\tau,dom}|}{|F_p|} = \frac{4}{3}\frac{h_0}{R}$$

Pertanto:

$$\frac{|F_{\tau,dom}|}{|F_p|} = O\left(\frac{h_0}{R}\right)$$

E siccome l'ipotesi fondamentale è $h_0 / R \ll 1$, segue che:

$$|F_\tau| \ll |F_p|$$

Quindi **al primo ordine della teoria di lubrificazione possiamo trascurare la forza tangenziale** e assumere:

$$F_A \approx F_p$$

Ossia:

$$F_A(v) \approx -\frac{9\pi^2\sqrt{2}}{4}\mu \frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}} v = -K_S v$$

Nota: il rapporto $4h_0 / (3R)$ serve soltanto a mostrare che il contributo tangenziale è di ordine inferiore rispetto a quello di pressione. Non va usato come correzione quantitativa della forza totale, perché anche F_p è già ottenuta con approssimazione al primo ordine di h_0 / R.

Al primo ordine della teoria di lubrificazione, la costante di resistenza del dispositivo risulta quindi:

$$K_S = \frac{9\pi^2\sqrt{2}}{4}\mu\frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}}$$

12: K_S costante di resistenza del dispositivo.

Quindi, analogamente ai casi 2 e 3, il coefficiente di smorzamento è:

$$b_S = \left|\frac{F_A(v)}{v}\right| = K_S = \frac{9\pi^2\sqrt{2}}{4}\mu\frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}}$$

13: coefficiente di smorzamento d_S per gap sferico sfera cilindro lineare.

E soprattutto è costante nelle ipotesi adottate, conseguentemente

$$F_A \propto -v$$

Possiamo anche esprimerlo direttamente mediante i diametri, poiché $R = D_s / 2$ e $h_0 = (D_g - D_s) / 2$, quindi:

$$\frac{R^{7/2}}{h_0^{5/2}} = \frac{1}{2}\frac{D_s^{7/2}}{(D_g - D_s)^{5/2}}$$

Quindi:

$$b_s = \left|\frac{F_A(v)}{v}\right| = K_S = \frac{9\pi^2\sqrt{2}}{8}\mu\frac{D_s^{7/2}}{(D_g - D_s)^{5/2}}$$

Il risultato mostra anche una caratteristica fisica molto importante:

$$d_S \propto h_0^{-5/2}$$

Quindi **lo smorzamento cresce molto rapidamente quando il gioco minimo diminuisce**.

Haberman e Sayre ottengono per una sfera rigida che trasla lentamente lungo un tubo cilindrico una forza resistente della forma:

$$D = 6\pi\mu RUK_1$$

Dove K_1 è il *wall correction factor* dipendente dal rapporto sfera/tubo: dunque anche la soluzione generale di Stokes dà drag lineare nella velocità. La nostra formula non è la loro soluzione esatta generale: è la deduzione asintotica di lubrificazione per $h_0 / R << 1$. Scritta nella stessa forma utilizzata da Haberman & Sayre,

$$F_A = -6\pi\mu Rv K_1$$

La presente soluzione di lubrificazione corrisponde, nel limite $h_0 / R \to 0$, a

$$K_1 \sim \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\left(\frac{R}{h_0}\right)^{5/2}$$

Haberman & Sayre forniscono invece la soluzione generale del problema di Stokes sfera–cilindro e confermano la linearità del drag rispetto alla velocità e la presenza dei contributi normale e tangenziale.

Fonte: Haberman, W. L., Sayre, R. M. (1958) - *Motion of Rigid and Fluid Spheres in Stationary and Moving Liquids Inside Cylindrical Tubes*. - **David Taylor Model Basin, Report 1143**, October 1958.