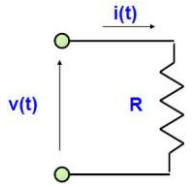
Sistemi dinamici e Simulink

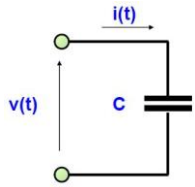
Un sistema è un ente che risponde ad un ingresso, detto $u(t)$ con una reazione, una uscita, detta $y(t)$.
Un sistema può essere **istantaneo**, se il valore $y(t)$ assunto dall'uscita al tempo t dipende solo dal valore $u(t)$ assunto dall'ingresso, oppure dinamico, in caso contrario.
*Il **sistema dinamico** evolve nel tempo non solo in funzione dell'ingresso ma dipende anche da una grandezza, detta stato, che rappresenta la storia passata degli ingressi del sistema*.
Un sistema dinamico può essere a **tempo continuo** ($t \in \Re$) o a **tempo discreto** ($t \in Z$): in questo articolo ci occupiamo di sistemi dinamici a tempo continuo.
Un sistema può essere **SISO** (**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput) se ha una sola grandezza in ingresso e una sola grandezza in uscita.

Un sistema SISO istantaneo è descritto da una equazione algebrica, ad esempio un sistema composto da un resistore ideale è un sistema statico, perché governato dalla legge:



$v(t) = R \cdot i(t)$

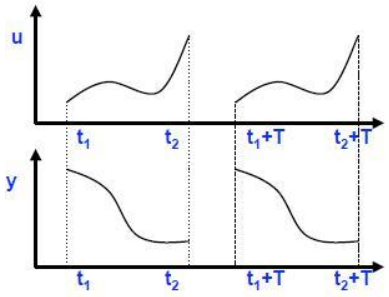
Un sistema SISO dinamico è descritto da una equazione differenziale, ad esempio un circuito con un condensatore è un sistema dinamico, in quanto governato dalla legge:



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Un sistema può essere **MIMO** (**M**ultiple **I**nputs **M**ultiple **O**utputs) e in questo caso è descritto da sistemi di equazioni algebriche (se istantaneo) o differenziali (se dinamico).
Un sistema è detto:

- **stazionario** o **tempo-invariante** - se per esso vale il principio di traslazione causa-effetto nel tempo, cioè se il sistema risponde sempre con lo stesso effetto ad una data causa, a prescindere dall'istante di tempo in cui tale causa agisca sul sistema. In pratica, se la medesima sollecitazione (ingresso) viene applicata non al tempo t ma ritardata di un tempo Δt provoca la stessa risposta (anch'essa traslata) da parte del sistema; in sintesi $u(t) = y(t) \rightarrow u(t+\Delta t) = y(t+\Delta t)$.
- **non stazionario** - in caso contrario.

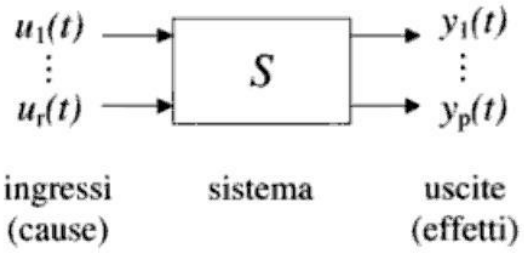


traslazione causa-effetto nel tempo.

Un sistema è detto:

- **lineare** - se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Ciò significa che se il sistema risponde a $u_1(t)$ con $y_1(t)$ e a $u_2(t)$ con $y_2(t)$, allora la risposta del sistema ad $a \cdot u_1(t)+b \cdot u_2(t)$ è $a \cdot y_1(t)+b \cdot y_2(t)$, qualunque siano i valori assunti dalle costanti a e b;
- **non lineare** - in caso contrario.

Matematicamente un sistema dinamico è lineare se descritto da equazioni differenziali lineari.
Un modo di rappresentare visivamente un sistema dinamico è il modello a descrizione **I**ngresso-**U**scita **IU**.



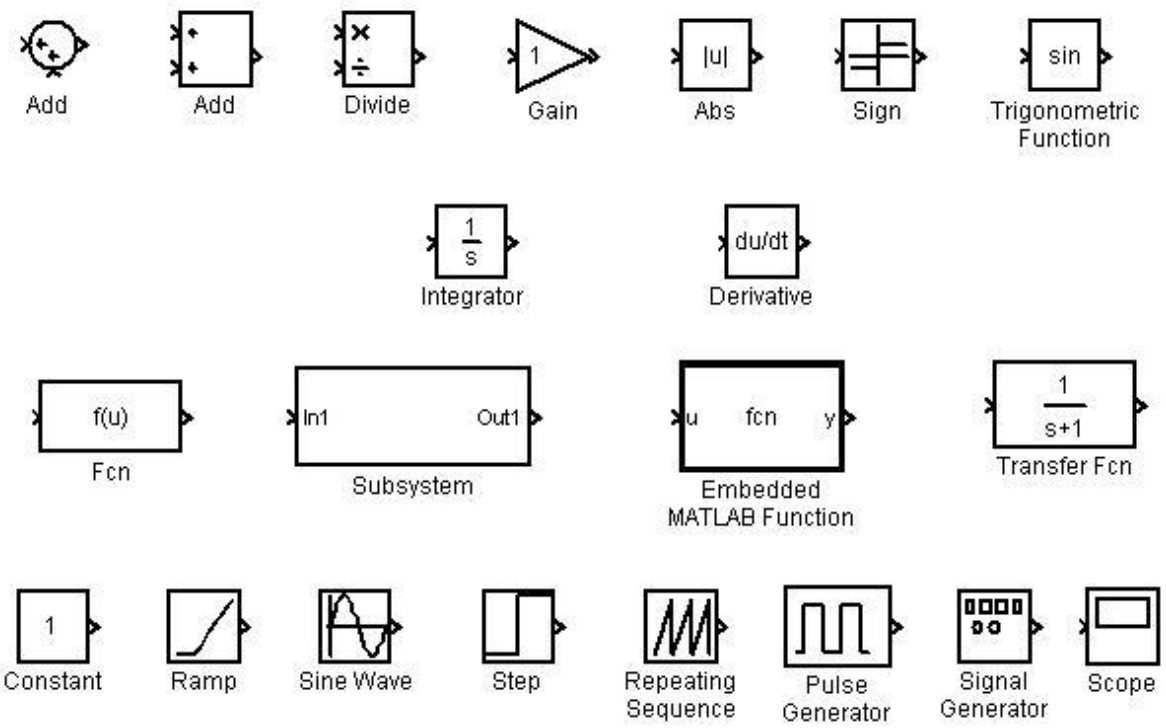
modello a descrizione Ingresso-Uscita

Il sistema SISO ha un unico ingresso $u(t)$ ed una unica uscita $y(t)$.
Nel MIMO si ha facoltà di indicare con $u(t)$ il vettore degli ingressi e con $y(t)$ il vettore delle uscite.
Il modello a descrizione Ingresso-Uscita **IU** descrive il legame tra l'uscita $y(t)$ (*e le sue derivate*) e l'ingresso $u(t)$ (*e le sue derivate*) sotto forma di una o più equazioni differenziali (o algebriche se il sistema è istantaneo).
L'argomento è vasto ma per noi è giusto una introduzione per arrivare al software di simulazione.
Simulink ® è una applicazione distribuita con **Matlab** ® che consente di sintetizzare e simulare sistemi dinamici in modo visuale, attraverso diagrammi a blocchi a descrizione Ingresso-Uscita IU.
Punti di forza:

- un sistema è rappresentato da uno o più blocchi **IU** interconnessi da linee;
- un segnale è rappresentato da una linea;
- ogni blocco di base compie operazioni semplici sui segnali (operatori matematici e altre funzioni);
- un blocco *custom* può contenere più blocchi raggruppati oppure codice Matlab oppure una relazione che lega il segnale d'uscita all'entrata del blocco stesso;
- a schema completato il simulatore consente di analizzare il sistema mediante varie opzioni.

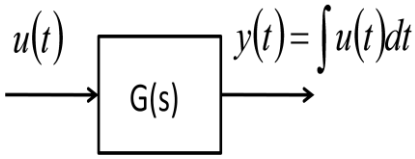
E' uno strumento per la **modellazione**, la **simulazione** e l'**analisi** di sistemi dinamici: lineari, non lineari, a tempo continuo e discreto, sistemi ibridi e macchine a stati.
Una volta realizzato lo schema, interconnettendo blocchi più semplici a descrizione IU, otteniamo un sistema più complesso.
Esistono blocchi di base per la generazione dei segnali, non-idealità (es. saturazione, banda morta, etc.), blocchi integratori, funzioni di trasferimento, ritardo, blocchi che effettuano operazioni matematiche e appositi per i sistemi di controllo.
E' sempre possibile lanciare una simulazione che calcola l'evoluzione temporale del sistema dinamico in esame.
Molti parametri della simulazione sono configurabili: intervalli di tempo, precisione di calcolo, metodi di integrazione delle equazioni differenziali (problemi non-stiff, es. *Runge-Kutta* di vario grado, problemi stiff, es. *BDF*, *Gear*, *Rosenbrock*).

I componenti di Simulink (blocchi di base) sono tantissimi, eccone una minima parte:



- blocchi Add - restituiscono la somma (con segno) dei segnali in ingresso;
- blocchi Divide e Gain - effettuano divisioni/moltiplicazioni , prodotti per uno scalare (Gain);
- blocchi Abs, Sign - restituiscono il valore assoluto o il segno del segnale in ingresso;
- blocchi Integrator e Derivative - integrano o derivano un segnale rispetto al tempo;
- Trigonometric Fcn ed altre funzioni matematiche (non rappresentate) per manipolare i segnali;
- Fcn, Subsystem, Embedded MATLAB Function - consentono di definire funzioni o sottosistemi in vari modi (*dando origine, insieme al prossimo, a blocchi custom, definiti dall'utente*);
- Transfer Function - consente di definire **funzioni di trasferimento**[1];
- Constant, Ramp, Sine Wave, Step, ..., Signal Generator sono sorgenti di segnali (input per altri blocchi);
- Scope - è una sorta di monitor che evidenzia l'andamento nel tempo del segnale che entra nel blocco. Esiste anche un blocco che manda il risultato nel *Workspace di Matlab*.

Nota: il blocco integratore ha simbolo 1/*s* perché la funzione di trasferimento di un blocco in cui entra una funzione ed esce il suo integrale è 1/*s*, infatti, la funzione di trasferimento è:



$$G(s)=\frac{L\left\{\int_0^t u(t)dt\right\}}{L\{u(t)\}}=\frac{\frac{1}{s}U(s)}{U(s)}=\frac{1}{s}$$

Il miglior modo per vedere come funziona Simulink è buttarsi... Allora pronti per cominciare? Voltate pagina...

[1] Una funzione di trasferimento è una rappresentazione matematica della relazione tra l'ingresso e l'uscita di un sistema LTI (lineare tempo-invariante). Nella teoria dei sistemi la funzione di trasferimento è una funzione della variabile *s* nel dominio complesso della trasformata di Laplace.

La legge del decadimento radioattivo

Supponiamo di avere un campione di Carbonio 14 di massa *1* kg e ci chiediamo quale sarà la sua massa fra *1000* anni, dopo che parte di esso sarà stato convertito in azoto per decadimento radioattivo.
La legge del decadimento è:

$$\boxed{\dot{x} = -kx}$$

in cui *k* è una costante (per il C14, $k = 1.21 \cdot 10^{-4}$) e *x*(*t*) la quantità di elemento radioattivo.
Le condizioni iniziali sono: $t = t_0 = 0$ y (anni) e $x_0 = 1$ kg.
Questa semplice equazione differenziale descrive un sistema che evolve nel tempo quindi possiamo utilizzare Simulink per risolvere il problema, naturalmente basta carta e penna per questo, ma è necessario vedere esempi molto semplici per comprenderne il funzionamento.

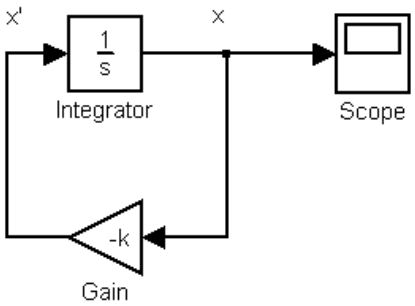
Sappiamo che la soluzione analitica è $x(t) = x_0 e^{-kt}$, infatti si tratta di una **E**quazione **D**ifferenziale **O**rdinaria a variabili separabili, molto semplice da integrare:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \rightarrow \frac{dx}{x} = -kdt \rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} dx = -k \int_0^t dt \rightarrow \log \frac{x}{x_0} = -kt \rightarrow \frac{x}{x_0} = e^{-kt}$$

Ma torniamo alle legge del decadimento: $\dot{x} = -kx$, e vediamo come "darla in pasto" a Simulink.
Se chiamo $\boxed{f'(t) = -kx(t)}$, ho:

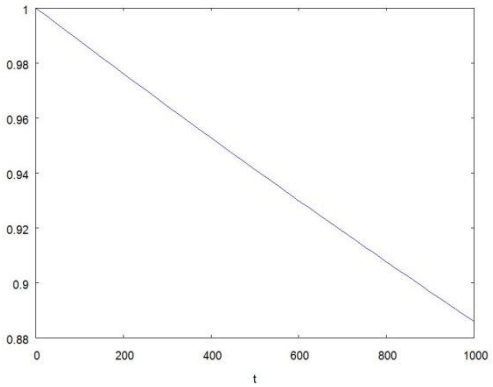
$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \rightarrow dx = f'(t)dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t f'(t)dt \rightarrow x = \int_0^t f'(t)dt + x_0$$

quindi se mando *f'*(*t*) dentro un blocco che integra (*e somma la condizione iniziale*), ottengo *x*.
Il metodo è quello di mandare la derivata, ora nota come *-k·x*(*t*) , dentro un blocco integratore.
Lo schema a blocchi che realizza tali operazioni è: (*le scritte x' e x sopra le connessioni sono soltanto commenti*).



All'uscita del blocco integratore, *x* viene prelevata e moltiplicata per la costante *k* cambiata di segno, il risultato entra nell'integratore. Questo schema a blocchi risolve l'equazione $\dot{x} = -kx$.
E' presente un blocco "Scope" che serve a mostrare a video l'andamento di *x*(*t*).
Poiché il periodo di *1000* è assai breve (*in relazione al decadimento del C14*), l'andamento sembra quasi una retta in realtà la formula è, appunto, $x(t) = x_0 e^{-kt}$.
Infatti, il tempo di dimezzamento del C14 è circa *5730* anni, come si ricava risolvendo per *t* l'equazione algebrica:

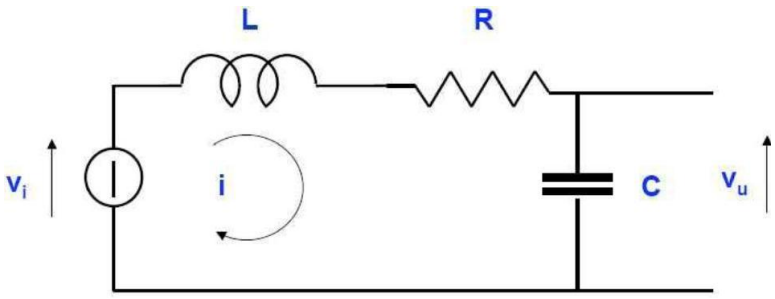
$$x(t) = \frac{1}{2} x_0 \rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{2} \rightarrow t = k^{-1} \log 2 .$$



Casi più complessi si risolvono con lo stesso principio: si otterranno schemi più complicati, con un maggior numero di blocchi, funzionanti però allo stesso modo.

Sistema elettrico: circuito RLC

Dati: $L = 10$ mH , $R = 40$ kΩ , $C = 2$ nF.
In ingresso, $v_i = 1$ V = costante (gradino unitario).
Per la legge di Kirchoff delle tensioni, $\Sigma V = 0$, quindi:



$$v_i = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad (1)$$

La corrente che passa nel condensatore è (che corrisponde ad *i*), vale:

$$i_c = i(t) = C\frac{dv_u}{dt} \quad (2)$$

Combinando le due si ha:

$$\boxed{v_i = LC\frac{d^2v_u}{dt^2} + RC\frac{dv_u}{dt} + v_u}$$

E' una *equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea*.
Esiste in questo caso una soluzione analitica.

L'equazione omogenea associata ha la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

In cui a = R/L e b = 1/(LC).
L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

che porta nel nostro caso a due soluzioni reali distinte (λ_1 e λ_2), per cui l'integrale generale è:

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$

Poiché v_i è una costante, si nota subito che $v_u = v_i$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, infatti le derivate di costanti sono nulle e quindi è verificata.
Per il principio di sovrapposizione (dato dalla linearità dell'equazione) si ha che la soluzione generale dell'equazione non omogenea è la soluzione generale dell'omogenea più la soluzione particolare, quindi:

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + v_i$$

Per la determinazione delle costanti arbitrarie d'integrazione c_1 e c_2 basta risolvere il problema di Cauchy.
Le condizioni iniziali del sistema fisico che prendiamo in considerazione sono:

$$\begin{cases} t = t_0 = 0 \\ v_u(0) = 0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

che suggeriscono anche

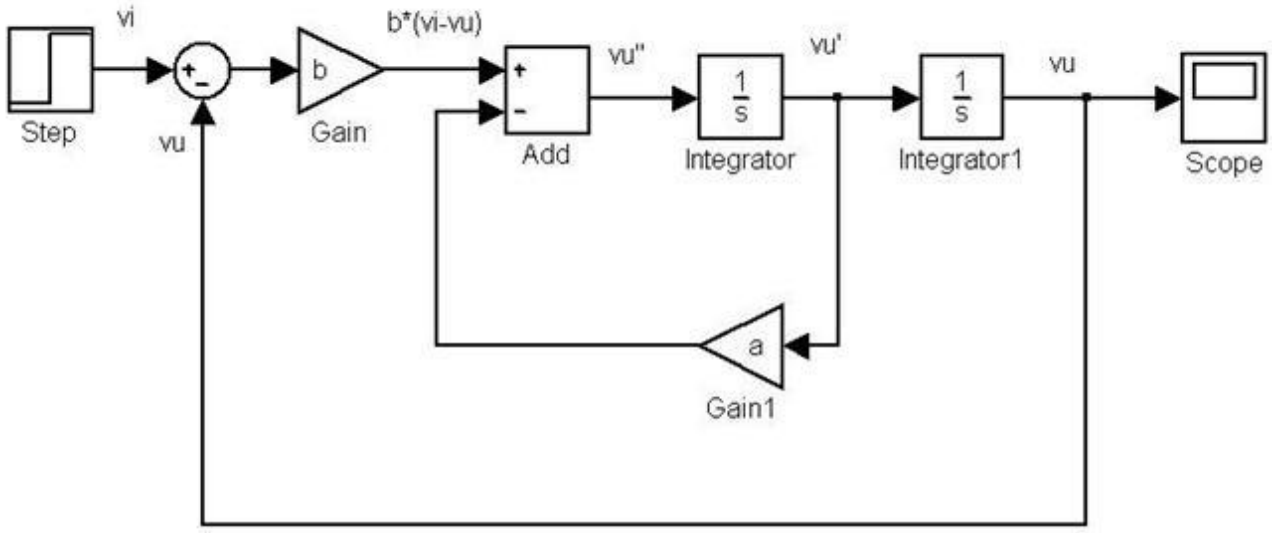
$$\left.\frac{dv_u}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

in accordo con la equazione n.2 (corrente nel condensatore).

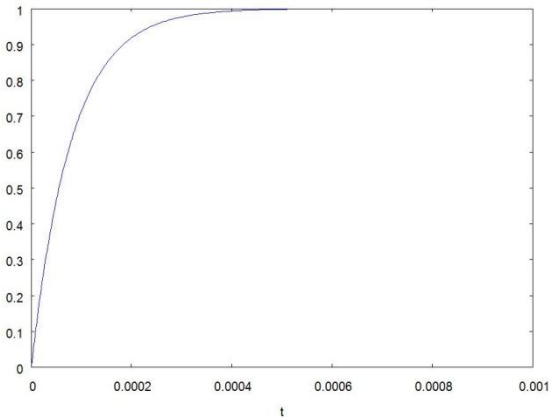
Per la sintesi dello schema a blocchi, isoliamo la derivata seconda di v_u e otteniamo:

(3) $$\frac{d^2 v_u}{dt^2} = \frac{1}{LC}(v_i - v_u) - \frac{R}{L}\frac{dv_u}{dt}$$

Lo schema a blocchi (con input = gradino unitario $v_i = 1$ V) diventa, ponendo $a = R/L$ e $b = 1/(LC)$:



Lanciando la simulazione si ottiene la soluzione raffigurata nel seguente grafico:



La tensione v_u [V] nell'asse delle ordinate ed il tempo t nell'asse delle ascisse [s].

Poiché questo è un sistema lineare a tempo invariante (LTI) risulta più comodo trattare il sistema attraverso la funzione di trasferimento.

Se L-trasformiamo l'equazione differenziale che descrive il sistema (con C.I. nulle) otteniamo:

$$V_i(s) = LCs^2 V_u(s) + RCsV_u(s) + V_u(s)$$

Ora raccogliamo l'uscita $V_u(s)$ e otteniamo:

$$V_i(s) = \left(LCs^2 + RCs + 1\right)V_u(s)$$

Se isoliamo $V_u(s)$ ricaviamo:

$$V_u(s) = V_i(s) \cdot \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Nota: questa è la L-trasformata della soluzione dell'equazione (3). Una volta sostituito a $V_i(s)$, l'ingresso (esempio gradino unitario 1/s), anti-trasformando si trova $v_u(t)$.

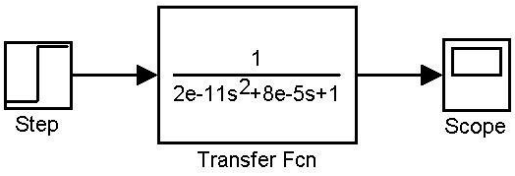
Rimanendo sulla trasformata, ricaviamo la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$G(s)=\frac{1}{2\cdot10^{-11}s^2+8\cdot10^{-5}s+1}$$

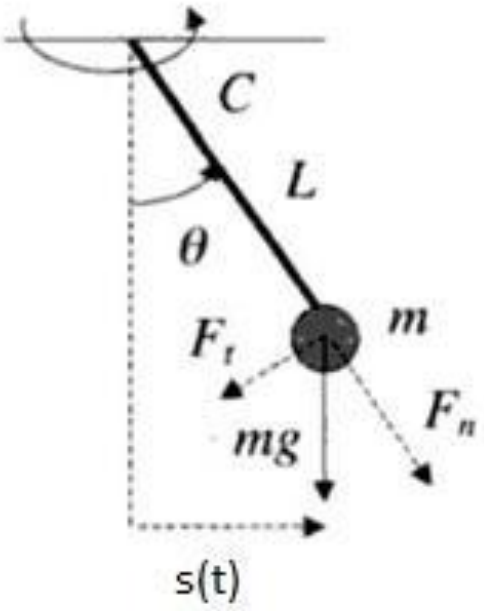
Con questo risultato possiamo sostituire lo schema a blocchi di prima con un unico blocco avente la f.d.t. appena trovata.



Lanciando la simulazione si ottiene, ovviamente, un risultato identico.

Sistemi meccanici

Il pendolo



Si consideri un pendolo costituito da una massa *m* puntiforme posta all'estremità di un'asta di lunghezza *L*, rigida e di massa trascurabile. La posizione della massa è individuata dall'angolo θ che l'asta forma con la verticale. Il verso di θ è assunto positivo in senso antiorario.

Il pendolo si muove sul piano verticale sotto l'azione della forza peso la cui componente tangenziale vale:

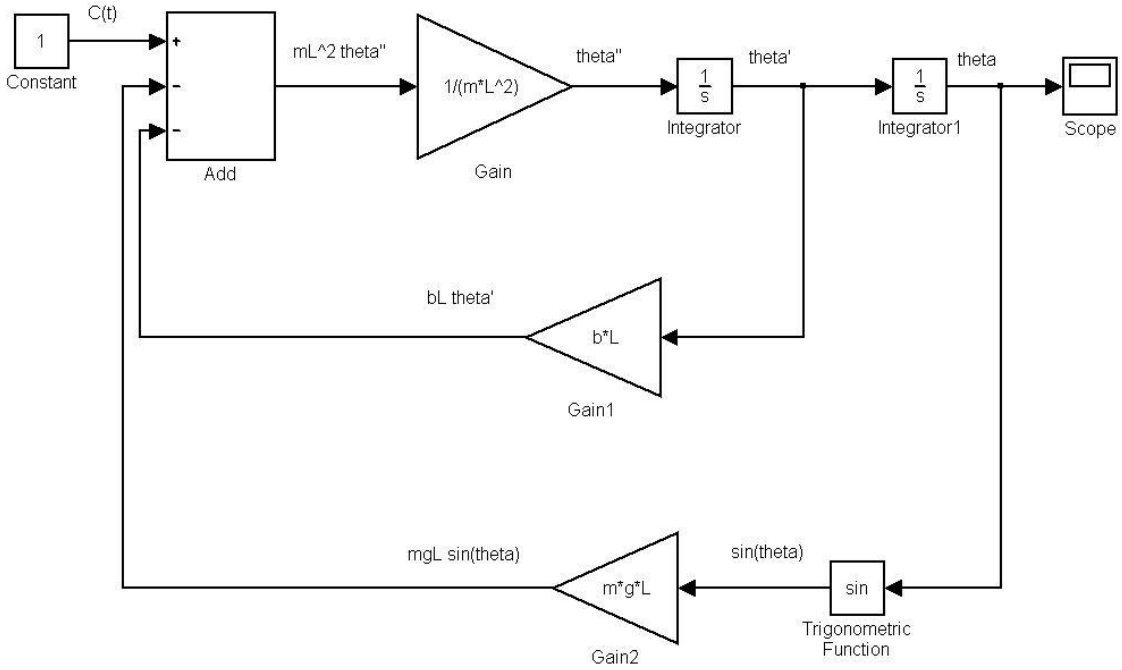
$$F_t(t)=-mg\sin\theta(t)$$

e sotto l'effetto di una coppia meccanica esterna, ingresso del sistema, *C*(*t*).
Vi è infine una forza d'attrito che si oppone al moto, che assumiamo sia proporzionale alla velocità della massa tramite un coefficiente d'attrito *b*.
L'ingresso è *u*(*t*) = *C*(*t*) e l'uscita è *y*(*t*) = θ.
Dalla dinamica rotazionale abbiamo:

$$\boxed{mL^2\ddot{\theta}(t)=-mgL\sin\theta(t)-bL\dot{\theta}(t)+C(t)}$$

Si tratta di equazione differenziale non lineare di difficile soluzione analitica.
Le soluzioni che forniscono i libri di meccanica passano attraverso ipotesi semplificative e l'approssimazione di sin θ *con la serie di Taylor troncata al primo ordine* (*sin* θ ≈ θ *per piccole oscillazioni intorno a 0* rad); *risulta quindi una equazione differenziale linearizzata, per cui vi sono maggiori possibilità di soluzione*.
Per fortuna a Simulink non interessa quanto siano complicate da risolvere analiticamente le equazioni; procede per via numerica in base alle istruzioni che gli forniamo (blocchi e connessioni). Un bel vantaggio.

Ecco uno schema a blocchi che descrive questo sistema.
Il pendolo è inizialmente verticale e in quiete: condizioni iniziali nulle, $t=t_0=0$, $\theta(t_0)=0$ rad e $\omega(t_0)=0$ rad/s (ricordando che $\omega = d\theta/dt$).



Il blocco sommatore addiziona algebricamente $mgL\sin\theta$, $bL\,d\theta/dt$ e l'ingresso $C(t)$.
Per ora l'ingresso è stato definito come costante $C(t) = 1$ Nm (poi lo cambieremo per vedere cosa succede).
All'uscita del sommatore si ricava $mL^2 d^2\theta/dt^2$. Moltiplicando per $1/(mL^2)$ si isola la derivata seconda.
I due successivi blocchi d'integrazione forniscono rispettivamente $d\theta/dt$ e θ.
Quest'ultimo va direttamente allo Scope per seguirne l'andamento a video.
Tramite retroazione $d\theta/dt$ e θ, opportunamente manipolate da altri blocchi, tornano al sommatore in quanto fondamentali per il calcolo della derivata seconda.
Con $L = 1$ m , $m = 1$ kg e $b = 0.1$ abbiamo ottenuto la seguente evoluzione dell'uscita (θ).

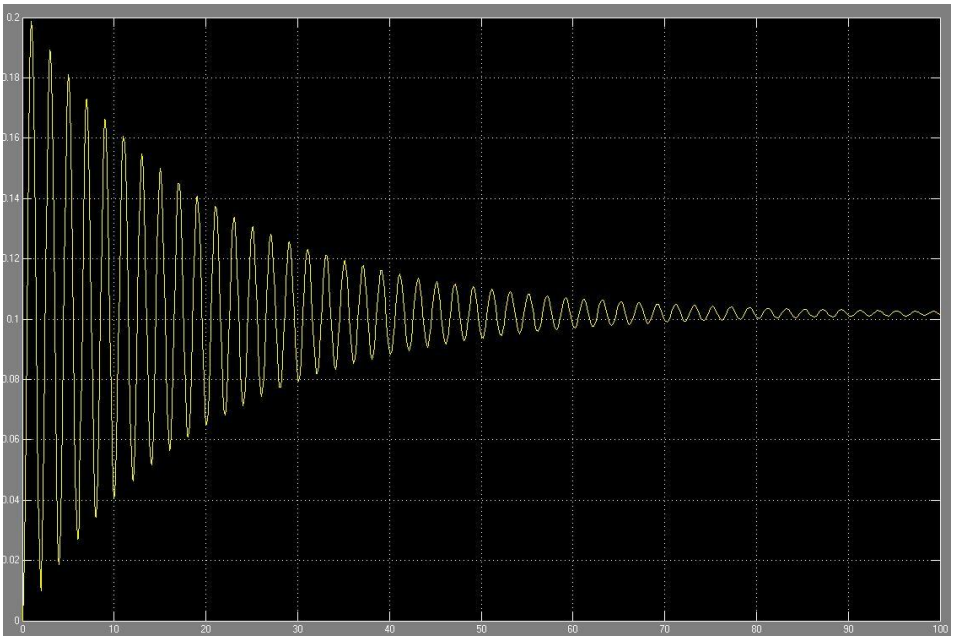
La coppia costante applicata al pendolo lo fa oscillare intorno al punto di equilibrio $\theta = 0.1$ rad (circa 6°).
Questo era prevedibile.
Che il sistema oscillasse intorno all'angolo 0.1 lo sapevamo anche risolvendo il problema in termini stazionari, infatti:

$$C(t) = mgL\sin\theta$$

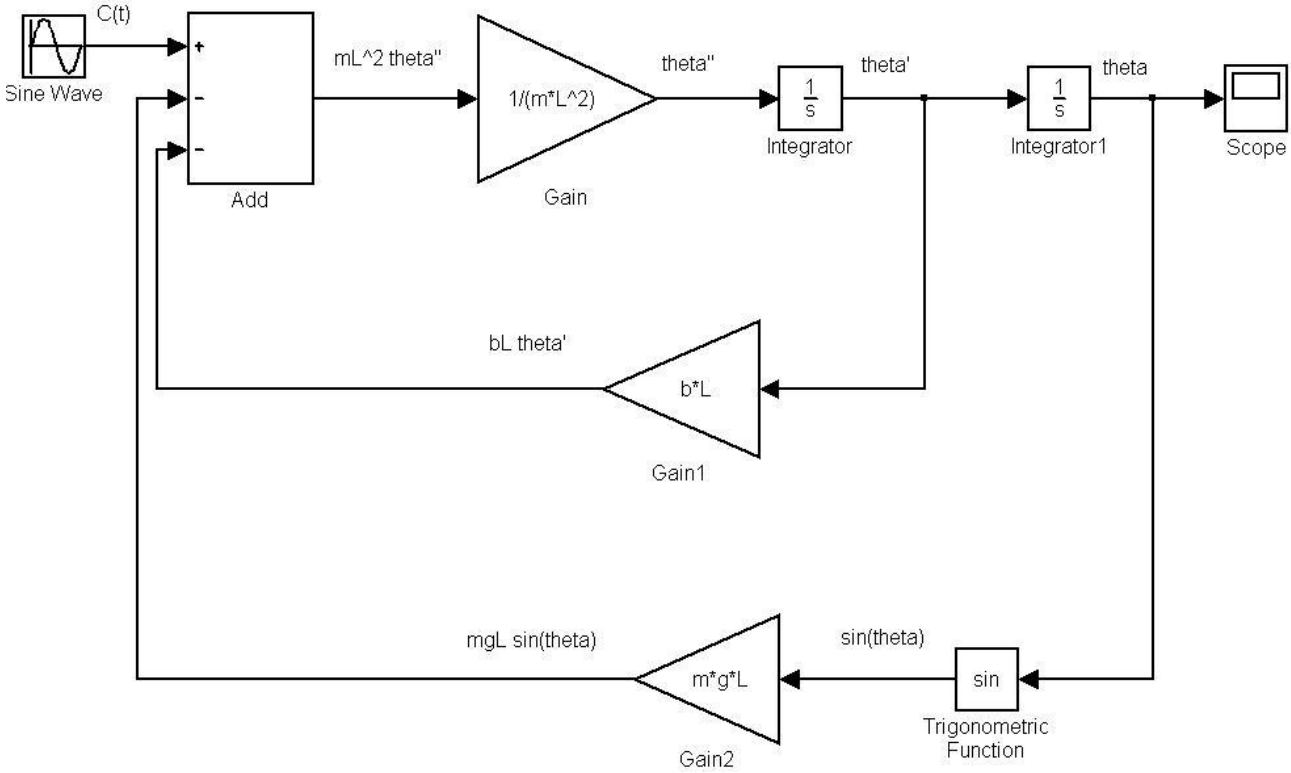
quindi, con $C(t) = 1$ Nm :

$$\sin\theta = \frac{1}{mgL} \approx 0.1\,\text{rad}$$

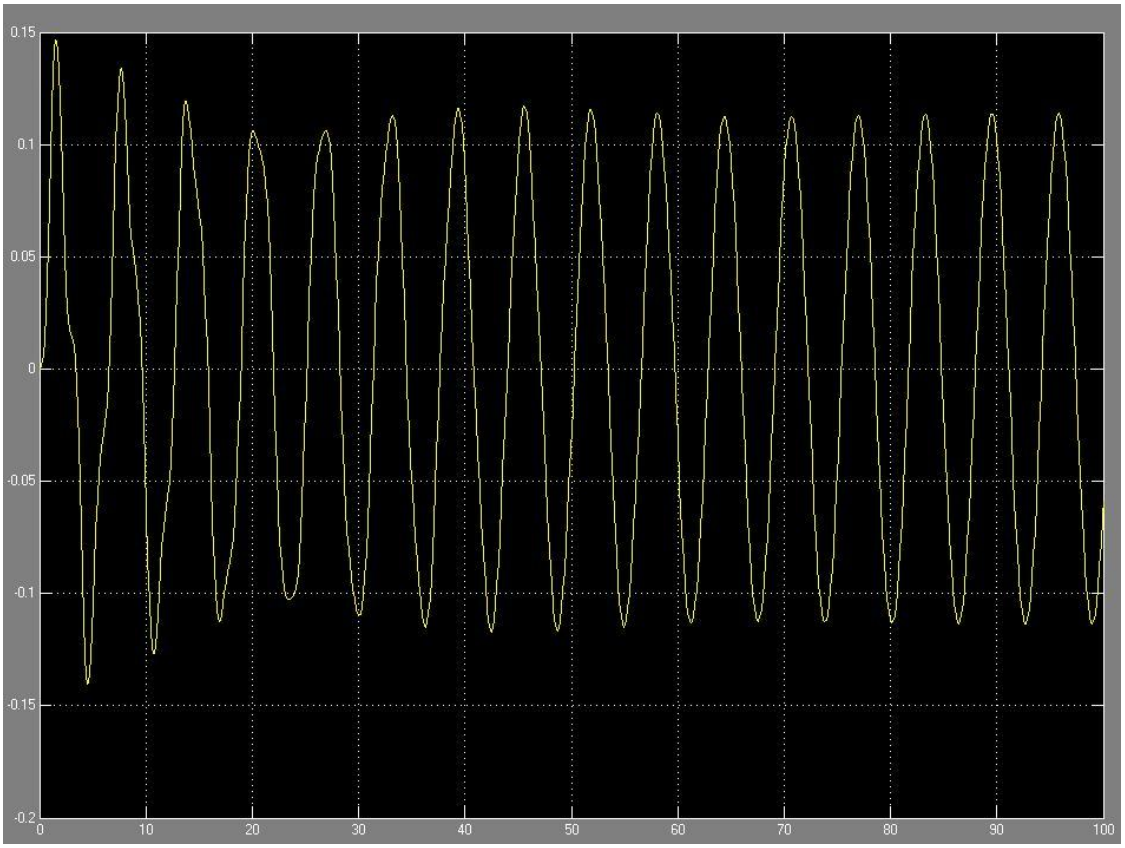
per cui $\theta \approx 0.1$ rad è un punto di equilibrio stazionario.



Altro aspetto positivo è la semplicità con la quale si può cambiare il segnale d'ingresso, ad esempio ora applichiamo una sinusoidale di ampiezza *1* e pulsazione *1* rad/s.
Sostituiamo il generatore di costante con il generatore di onda sinusoidale (Sine Wave).

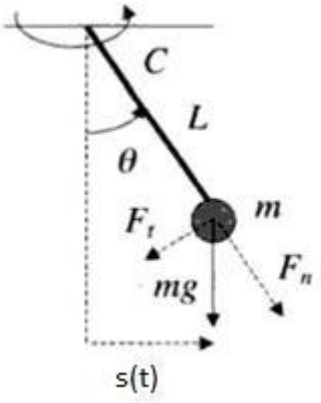


Se rilanciamo la simulazione ora ci attendiamo una evoluzione differente.

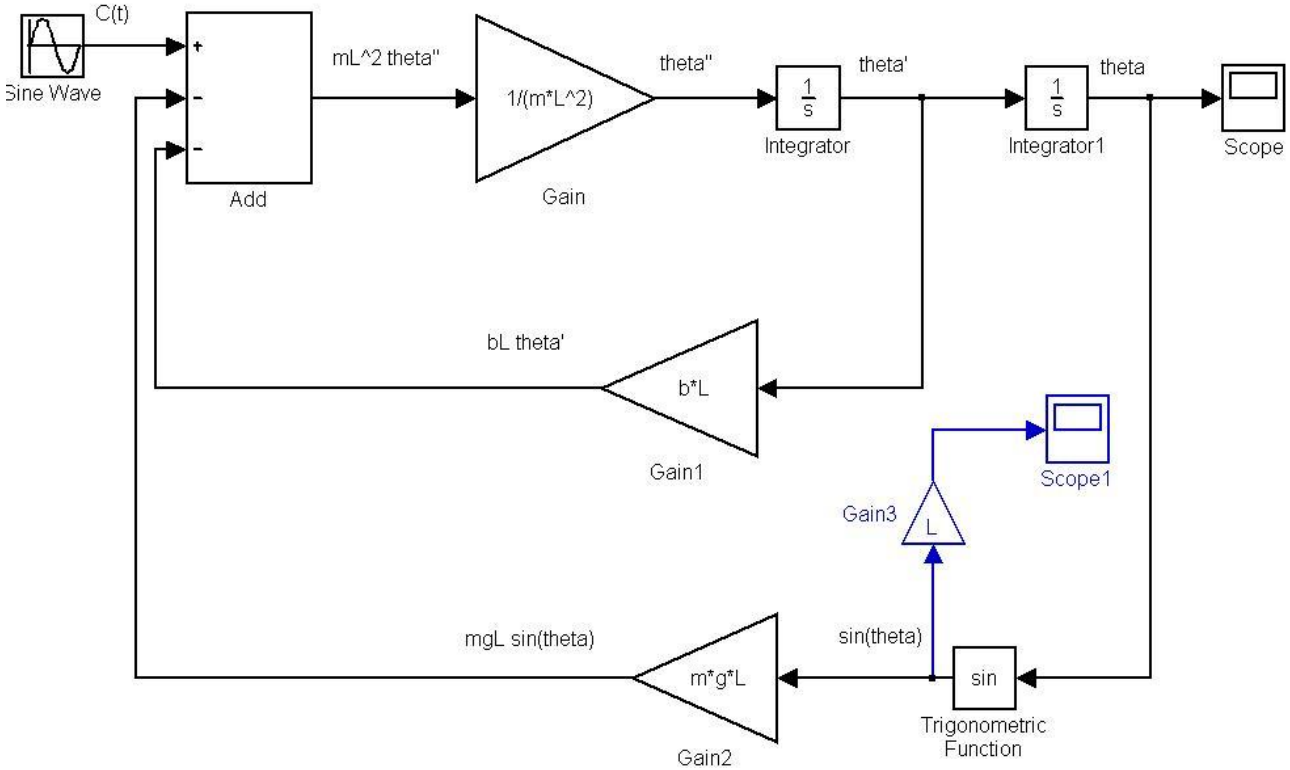


Si vede come il risultato sia di tutt'altro tipo. Il pendolo mantiene l'oscillazione a causa dell'ingresso forzante *C*(*t*).

Proprio com'è semplice cambiare il segnale d'ingresso, è altrettanto semplice aggiungere blocchi per modificare il comportamento del sistema o anche per estrarre e controllare variabili del sistema stesso. Ad esempio ci potrebbe interessare l'evoluzione di *s*(*t*).

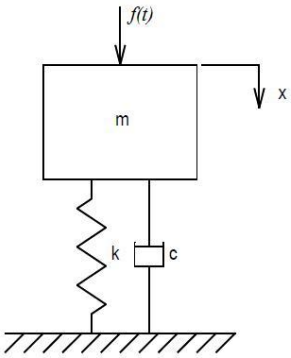


In questo caso basta aggiungere un blocco (Gain3) per realizzare il prodotto *L*·*sin* θ e un monitor per visualizzare il risultato (Scope1).



Il risultato, essendo *L* = *1* m, presenta visivamente lo stesso andamento di prima per θ, anzi coincide con il grafico precedente, eccetto il fatto che misuriamo una lunghezza e non un angolo (ma questo Simulink non lo sa, per lui sono tutti numeri).

Massa molla smorzatore

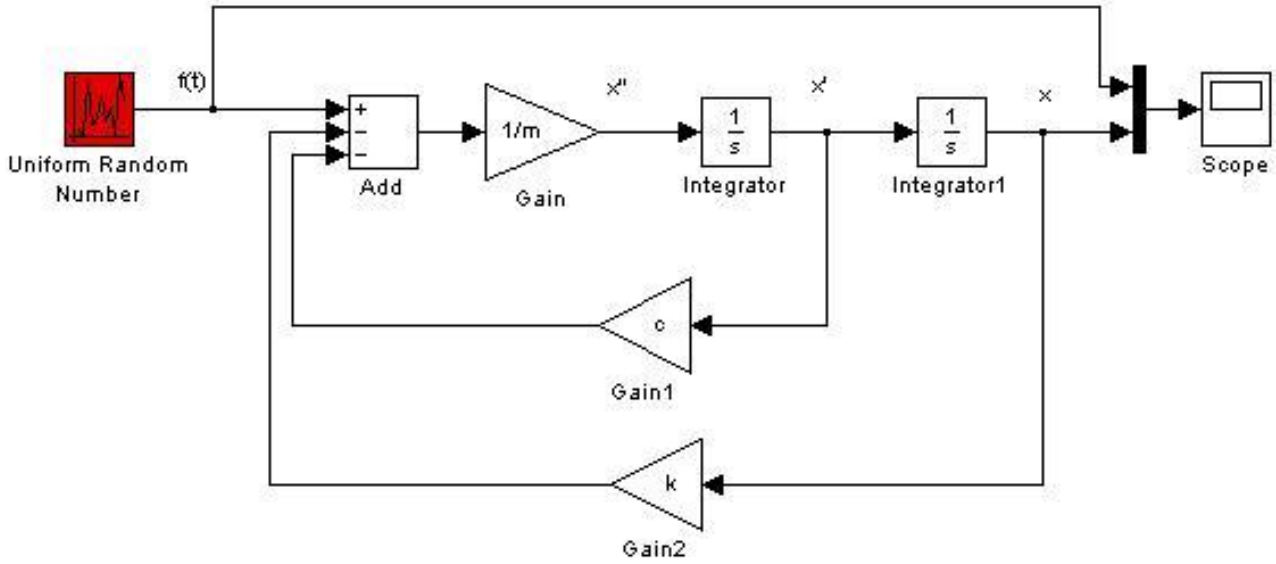


La seconda legge di Newton ci porta a scrivere

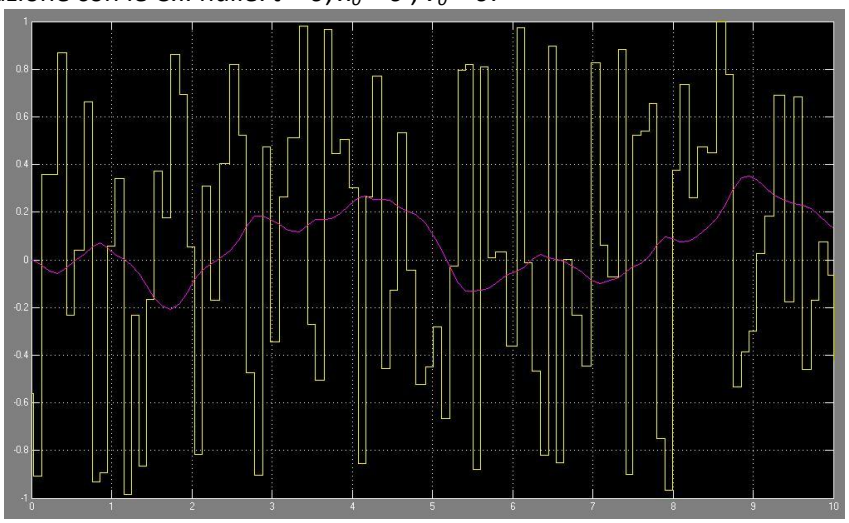
$$m\ddot{x} = f(t) - c\dot{x} - kx$$

Anche questa è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea, *proprio come quella del circuito RLC*.
A differenza dell'esempio precedente però, la $f(t)$ non è nota (è un segnale casuale).
Non possiamo quindi ricavare una soluzione analitica.

Lo schema a blocchi risulta:



Si noti come i segnali di ingresso e uscita vengono raccolti e mandati verso un unico Scope per vederli a confronto (*nello stesso grafico*).
Lanciamo la simulazione con le C.I. nulle: $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.



In giallo è rappresentato il segnale d'ingresso casuale $f(t)$ mentre l'altro segnale è $x(t)$.

Per la funzione di trasferimento, usiamo la trasformata di Laplace; L-trasformiamo l'equazione (C.I. nulle) e otteniamo:

$$ms^2X(s) = F(s) - csX(s) - kX(s)$$

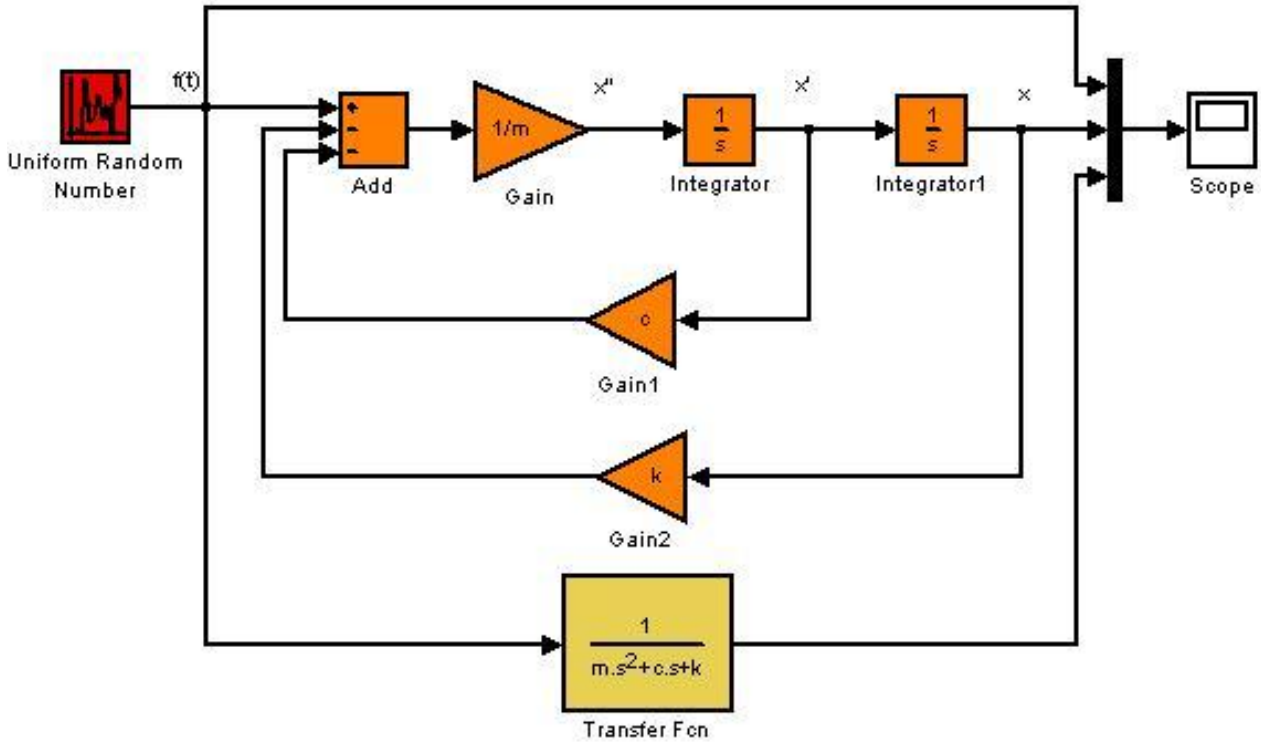
Isoliamo l'uscita $X(s)$ e l'ingresso $F(s)$.

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s) \rightarrow (ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$$

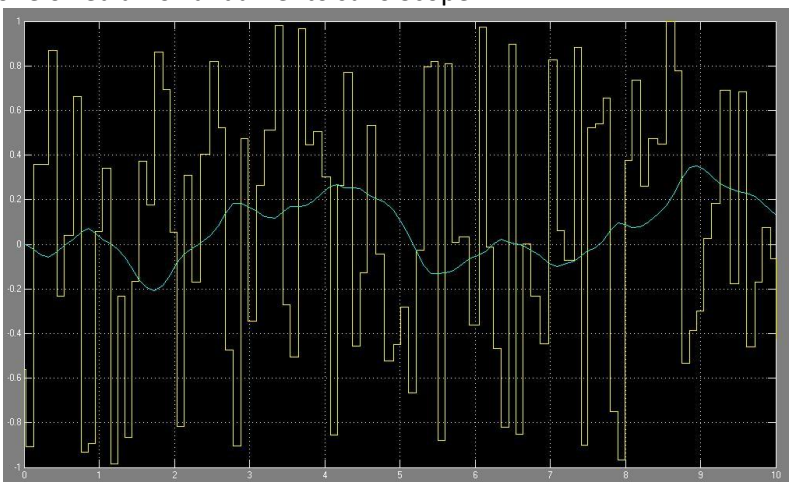
La funzione di trasferimento è:

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$

Si noti che come l'equazione è simile a quella del circuito RLC, anche la f.d.t. è identica (*a meno dei coefficienti del polinomio in s*).
Ovviamente ci aspettiamo che un unico blocco con questa funzione di trasferimento fornisca lo stesso risultato dello schema precedente quando vi è applicato uno stesso segnale in ingresso.

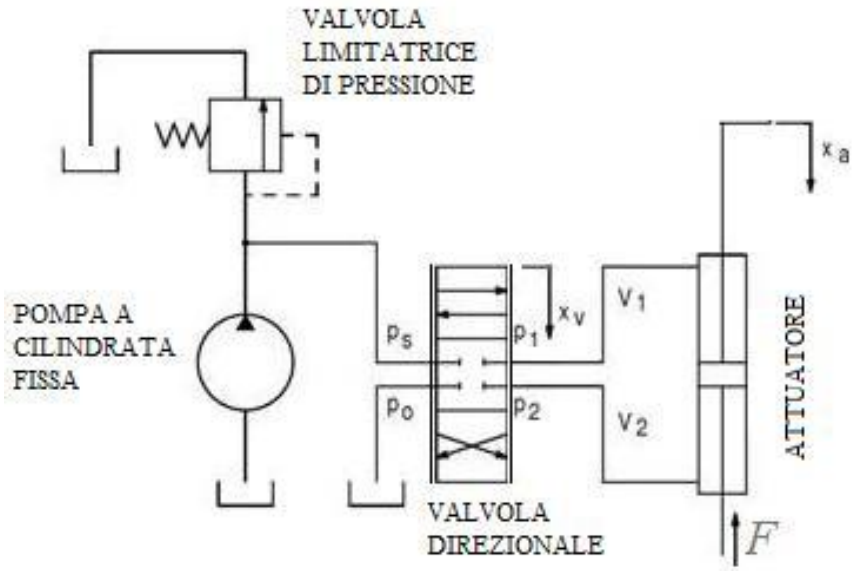


Ho messo in parallelo al circuito precedente il blocco con la funzione di trasferimento appena ricavata. Lanciamo la simulazione o vediamo l'andamento sullo Scope.



Ci rassicura il fatto di vedere soltanto due curve, quando dovrebbero essere tre; evidentemente la curva del circuito precedente e la curva fornita dal blocco con la funzione di trasferimento coincidono.

Sistema idraulico



Una pompa a cilindrata fissa alimenta un attuatore tramite una valvola direzionale a posizionamento continuo a centro critico.
L'ingresso del sistema $x_v(t)$ provocherà l'apertura e la chiusura degli spigoli pilotanti del cassetto della valvola direzionale in modo ben definito (verso il basso) e l'attuatore verrà alimentato.
L'uscita del sistema è la posizione $x_a(t)$ dell'attuatore sotto l'effetto della forza costante F e dell'attrito.
Lo schema è quello in figura.
Definendo $p_L = p_1 - p_2$, applichiamo la seconda legge di Newton all'attuatore:

1. $$\boxed{m\ddot{x}_a = p_L A - c\dot{x}_a - F}$$

in cui A è la sezione utile, m la massa, c il coefficiente d'attrito viscoso.
Applichiamo la legge di continuità alle due camere:

2. $$Q_1 - C_{ip}(p_1 - p_2) - C_{ep}p_1 = \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{\beta}\frac{dp_1}{dt}$$

3. $$-Q_2 + C_{ip}(p_1 - p_2) - C_{ep}p_2 = \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{\beta}\frac{dp_2}{dt}$$

Dove C_{ip} = coefficiente laminare delle perdite interne al pistone e C_{ep} = coefficiente delle perdite esterne.
Sottraendo la (2) alla (1), introducendo $Q_L = (Q_1+Q_2)/2$ e sostituendo a p_1 e p_2, p_L, si arriva a:

$$Q_L = \left(C_{ip} + \frac{1}{2}C_{ep}\right)p_L + A\dot{x}_a + \frac{V_T}{4\beta}\cdot\frac{dp_L}{dt}$$

Il volume totale è la somma dei due volumi, e rimane costante, $V_T = V_1+V_2$.
Sostituiamo il valore di Q_L con l'espressione linearizzata della valvola direzionale otteniamo:

$$K_q\, x_v - K_c\, p_L = \left(C_{ip} + \frac{1}{2}C_{ep}\right)p_L + A\dot{x}_a + \frac{V_T}{4\beta}\cdot\frac{dp_L}{dt}$$

Se raggruppiamo tutti i termini che contengono p_L e definiamo $K_{ce} = C_{ip} + C_{ep}/2 + K_c$ allora abbiamo l'equazione lineare a tempo invariante (LTI) del primo ordine che lega pressione e portata sul carico:

4. $$\boxed{\frac{V_T}{4\beta}\dot{p}_L + K_{ce}\, p_L = K_q x_v - A\dot{x}_a}$$

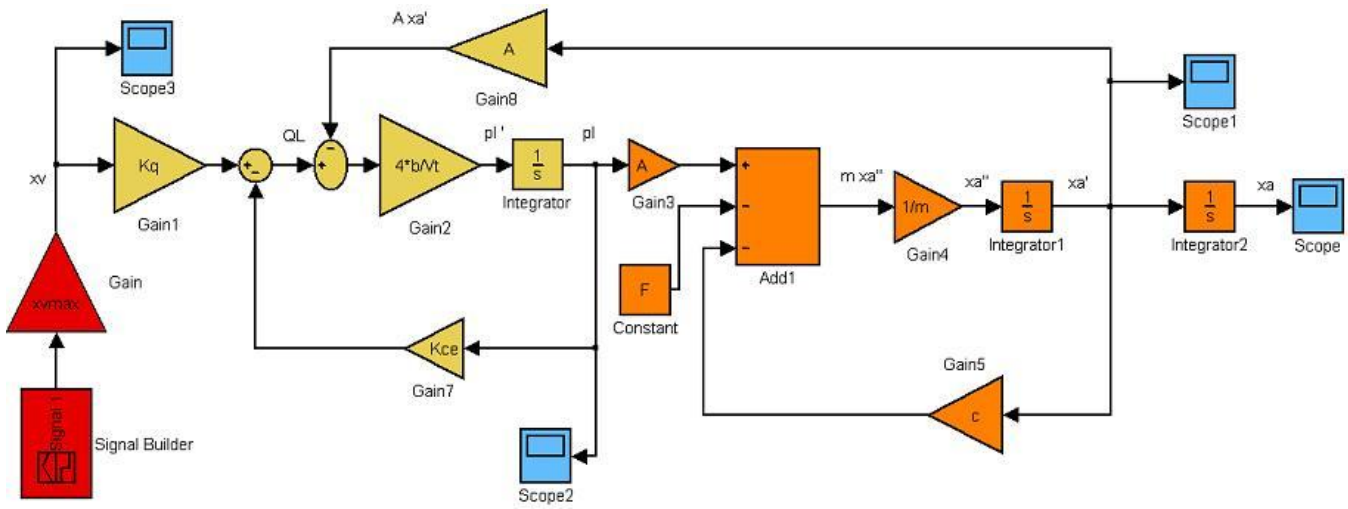
La (1) e la (4) a sistema costituiscono il modello matematico linearizzato che descrive il sistema fisico:

$$\begin{cases} \ddot{x}_a = \dfrac{p_L A - c\dot{x}_a - F}{m} \\ \dot{p}_L = \dfrac{4\beta}{V_T}\left(K_q x_v - K_{ce} p_L - A\dot{x}_a\right) \end{cases}$$

Per la simulazione numerica, l'ingresso del sistema $x_v(t)$ parte da zero e arriva a $0.5 \cdot 10^{-3}$ m (valore massimo) in *0.05* s seguendo una linea retta, quindi rimane fermo per *0.9* s e ritorna a zero in *0.05* s sempre con una linea retta. Poi rimane fermo. Il grafico è mostrato nella prossima pagina.
Gli altri dati sono:
massa $m_a = 750$ kg, $F = 7360$ N , $\beta = 1.2 \cdot 10^{9}$ Pa, $V_T = 0.7677 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $A = 1.473 \cdot 10^{-3}$ m^2, $c = 1.17$ Ns/m;
coefficienti della valvola direzionale: $K_q = 0.821$ m^2/s e $K_{ce} = 6.84 \cdot 10^{-12}$ m^{3}s^{-1}Pa^{-1} (C_{ip}=C_{ep}=*0*).
Le condizioni iniziali sono:

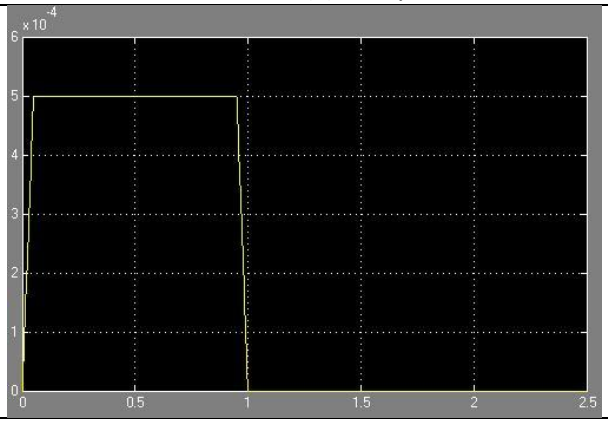
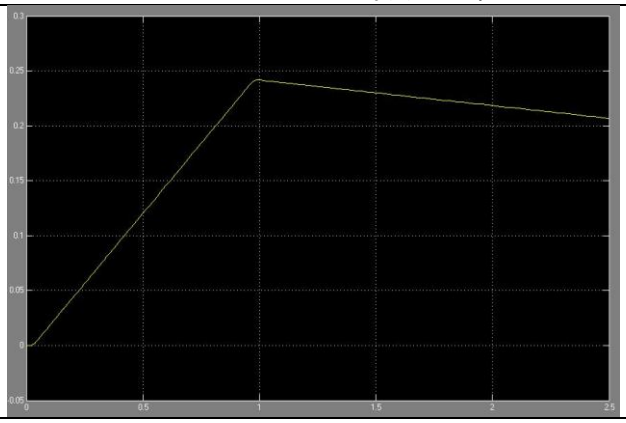
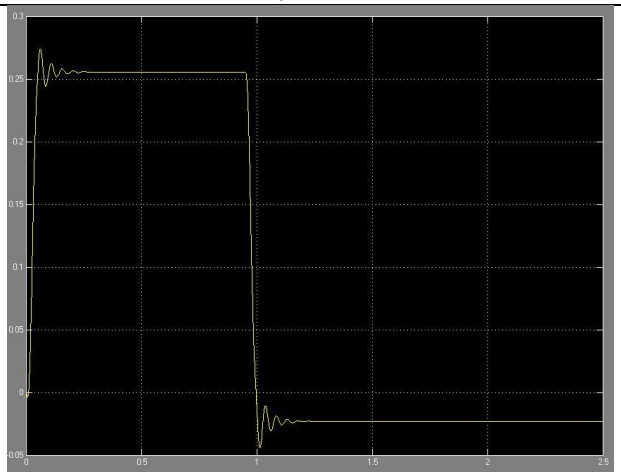
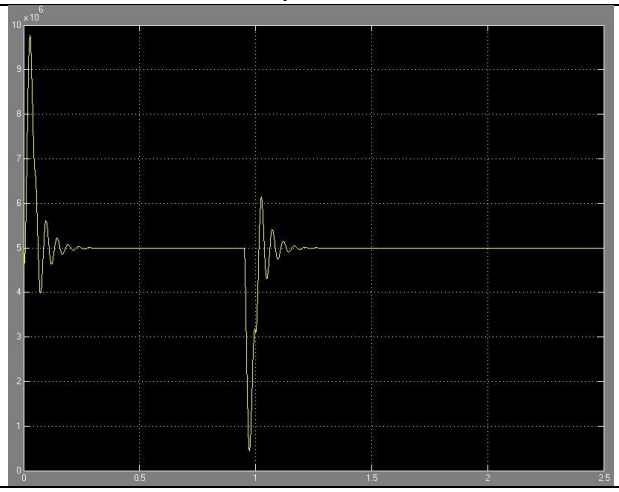
$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ x_a(0) = 0 \\ \left.\dfrac{dx_a}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ p_L(0) = \dfrac{F}{A} = 5 \cdot 10^6\ Pa \end{cases}$$

Il sistema dinamico può essere rappresentato dal seguente schema a blocchi.



I blocchi in giallo rappresentano la seconda equazione del sistema, quelli in arancione la prima.
I blocchi in rosso creano il segnale di comando, che ha l'andamento descritto da Scope3.

Lanciando la simulazione otteniamo (per 2.5 s) ...

Comando $x_v(t)$. Scope 3	Posizione attuatore $x_a(t)$. Scope
	
Velocità $dx_a(t)/dt$. Scope 1	Pressione $p_L(t)$. Scope 2
	

Si nota che la posizione dell'attuatore decresce vistosamente... Ciò è dovuto al fatto che, K_{ce} contabilizza tutte le perdite di volume e anche con $C_{ip}=C_{ep}=0$ (trafilamenti nulli nell'attuatore), rimane il K_c che anche con $x_v = 0$ sottrae comunque la portata $K_{ce}\cdot p_L$ che pare eccessiva rispetto al comportamento reale della valvola direzionale (cioè maggiore del trafilamento Q_{loss} a valvola chiusa quando la pressione sull'attuatore è p_L).

Il motivo è che i coefficienti della valvola direzionale linearizzata sono stati presi (discrezionalmente) intorno al punto $x_v = 0.25\cdot 10^{-3}$ m e $p_L = F/A$.

Se i coefficienti fossero stati calcolati in prossimità dell'apertura ($x_v = 0$) e per K_c si fosse preso un valore tale da soddisfare $K_c\cdot p_L = Q_{loss}$, avremmo ottenuto la discesa reale del carico, a scapito tuttavia di un errore maggiore quando il cassetto è aperto al massimo.

Nessuno vieta però di impostare in Simulink il modello non lineare.

Il software mette a disposizione della simulazione dei sistemi (sia istantanei che dinamici) innumerevoli possibilità per cui è soltanto la nostra fantasia che pone limiti a quanto si riesce a studiare con questo tipo di programmi.

Grazie per la gentile attenzione.

Paolo Ferraresi

