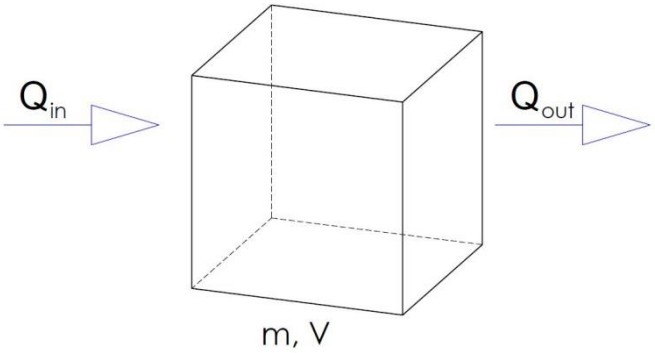
La legge della pressione

In figura vediamo un **volume di controllo**:



Massa ***m*** – Volume ***V***, densità ***ρ***, modulo di compressibilità isoterma **β**, portate in ingresso e uscita $\mathbf{Q_{in}}$, $\mathbf{Q_{out}}$.
La variazione istantanea di massa, o il gradiente con la quale cresce è data dalla differenza istantanea tra la portata massica che entra M'_{in} e la portata massica che esce M'_{out}.

$$\frac{dm}{dt} = \dot{M}_{in} - \dot{M}_{out} \qquad [1]$$

Essendo massa = ρ · volume, scriviamo:

$$\frac{d}{dt}(\rho \cdot V) = \rho \cdot Q_{in} - \rho \cdot Q_{out} \rightarrow \rho \frac{dV}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot V = (Q_{in} - Q_{out}) \cdot \rho \qquad [2]$$

Il modulo di compressibilità (o modulo di comprimibilità, modulo di massa o modulo di bulk) di una sostanza è l'aumento della densità provocato da una compressione. È definito come l'incremento di pressione necessario a causare un relativo incremento di densità secondo la relazione:

$$\beta = \rho \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} \qquad [3] \qquad \text{da cui} \quad \rho = \beta \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad [4]$$

Sostituendo ho:

$$\beta \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dV}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot V = (Q_{in} - Q_{out}) \cdot \beta \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad [5]$$

Divido tutto per $\beta \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p}$ e ottengo:

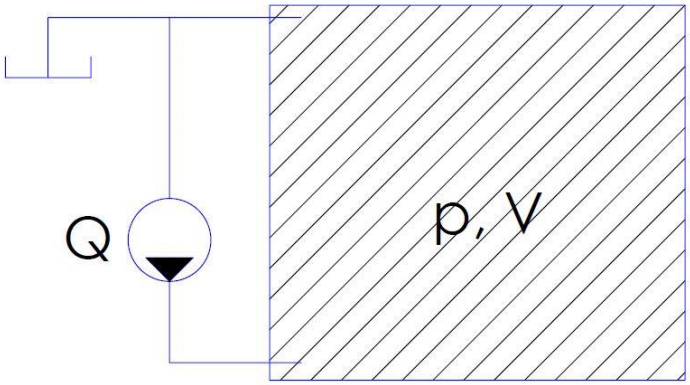
$$\frac{dV}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{V}{\beta} = Q_{in} - Q_{out}$$

Ne risulta quindi la **Legge della Pressione** o **legge di continuità**:

$$\boxed{Q_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt}} \qquad [6]$$

La differenza netta di portata corrisponde alla variazione di volume e/o a una variazione della pressione proporzionale al volume e inversamente proporzionale al modulo di compressibilità.
Da un punto di vista qualitativo la formula spiega che se il volume rimane costante, la pressione aumenta se la portata netta è positiva o diminuisce se negativa.
A parità di pressione invece, la portata netta si traduce esattamente in una variazione di volume.
Nota: la forma di grande utilità pratica e ben popolare di equazione di continuità $Q_{in} = Q_{out}$ è quindi la soluzione stazionaria della [6].

Applicazione: una pompa a cilindrata costante inizia ad erogare una portata dentro un serbatoio con olio inizialmente alla pressione atmosferica che ha un bocchettone per l'uscita dell'olio in cima con un tubo come mostrato in figura.
S'ipotizza che le dimensioni delle tubature siano tali per cui il regime di moto dell'olio sia laminare.
Determinare la funzione di trasferimento del sistema e si verifichi la risposta del sistema ad una portata costante Q.



Applichiamo la legge della Pressione.

$$Q_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt}$$

Dove $Q_{in} = Q$, $Q_{out} = H \cdot p$, $dV/dt = 0$ (volume del serbatoio costante).

$$q - H \cdot p = \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt}$$

Se passiamo alle trasformate di Laplace si ha:

$$Q - HP = s\frac{V}{\beta}P$$

La funzione di trasferimento è quindi:

$$\boxed{G(s) = \frac{\beta}{s \cdot V + \beta \cdot H}}$$

Quindi, il sistema risponde a Q/s con:

$$P(s) = G(s) \cdot \frac{Q}{s} = \frac{\beta \cdot Q}{s^2 \cdot V + s \cdot \beta \cdot H}$$

Anti trasformando si ha:

$$p(t) = \frac{Q}{H}\left(1 - e^{-\frac{H}{V} \cdot \beta \cdot t}\right)$$

Il sistema ha dunque un transitorio espresso dalla formula di p(t) e a finito il transitorio si ha:

$$P_P = \lim_{t \to \infty} \frac{Q}{H}\left(1 - e^{-\frac{H}{V} \cdot \beta \cdot t}\right) = \frac{Q}{H}$$

Il risultato non stupisce perché in regime laminare, la portata nel tubo di scarico è appunto $Q = H \cdot P_P$.

Paolo Ferraresi.

