Analisi stazionaria e transiente a parametri concentrati di una valvola unidirezionale

per applicazioni oleodinamiche.

Modena, 23 febbraio 2013.

di ***Paolo Ferraresi***.



http://www.paoloferraresi.it

Introduzione

Vediamo in sezione e nello schema ISO1219 una **valvola unidirezionale** (**V.U.**) composta da: **corpo valvola**, **tappo**, **molla** ed **elemento mobile**. Il primo è un blocco di acciaio o ghisa dotato di **due porte idrauliche** (o *bocche* o *attacchi*) e **cavità** che funge da **sede per l'elemento mobile**.



Funzione:

(A) **il fluido può transitare dalla porta 1 alla 2**;

(B) **risulta bloccato dalla porta 2 alla 1**.

Durante (A), la corsa dell'elemento mobile è limitata meccanicamente così da evitare che la molla possa ritrovarsi "a spire bloccate" col rischio di rompersi. Nelle V.U., ha di solito costante elastica limitata per risparmiare energia. Quando è grande, si desidera mantenere un ΔP tra 1 e 2, come nelle valvole limitatrici di pressione. La molla s'accorcia di x_v (corsa) per aprire il passaggio d'olio quanto basta in funzione della portata in ingresso.

Durante la funzione (B), la molla s'arresta prima di raggiungere la lunghezza di riposo, di una quantità x_p, per garantire che l'elemento mobile non rimanga "libero" e mantenga quindi una forza attiva "netta" che prema sulla sede: tale valore (x_p) è la precompressione della molla. Se così non fosse si rischierebbero trafilamenti con bassi ΔP tra porta 2 alla porta 1.

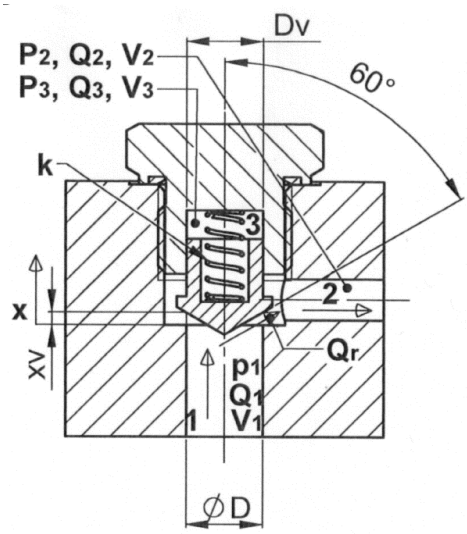


Fig. 1 - sezione della valvola unidirezionale per applicazioni oleodinamiche.

Dati

Parametri geometrici: diametri D = 12 mm, D_v = 12 mm, D_2 = 12 mm, α = 60°, L = 5 mm = lunghezza media del tratto accoppiato dell'elemento mobile (D_v) con la guida sul tappo, C_r = 0.05 mm (gioco radiale camicia/tappo).
Volume compreso tra pompa e attacco "1", V_1 = 1 dm^3, tra attacco "2" e scarico, V_2 = 1 dm^3.
Parametri oleodinamici: Bulk modulus β = $1.75 \cdot 10^9$ N/m^2, densità del fluido ρ = 920 kg/m^3 , viscosità μ = 0.039 $N \cdot s/m^2$.
Ipotizziamo C_d = 0.62 e C_v = 0.98. Massa m = 0.2 kg (= massa elemento mobile + 1/3 massa della molla).
Molla: costante elastica k = 10 N/mm, precompressa di x_p = 2 mm (precarico F_0 = 20 N).

Obiettivo

Realizzare un modello matematico del sistema dinamico rappresentato. Input: portata, Output: corsa, pressione.

Decisioni

Utilizziamo un **modello a parametri concentrati** non lineare . Sarà necessario il ricorso al **calcolo numerico** e la soluzione è affidata a una **simulazione al computer** tramite Matlab® oppure Octave, entrambi adattissimi allo scopo.
Esamineremo quindi la possibilità di **linearizzare il sistema vicino a una soluzione stazionaria**.
Il sistema linearizzato impone determinate ipotesi semplificative: da un lato aumenta il grado d'approssimazione, dall'altro però, sarà più facile comprendere il comportamento del sistema, *almeno nelle condizioni d'equilibrio*.

Ipotesi

Nel modello non lineare, la portata può essere variabile nel tempo a piacimento, nel modello lineare si fa l'ipotesi di flusso stazionario, in pratica la portata viene considerata costante per un tempo superiore al tempo d'adattamento che avviene nella fase di transizione, anzi quest'ultimo non viene proprio considerato.
Si suppone che la valvola sia alimentata da una pompa alla bocca 1 e connessa al serbatoio alla bocca 2.
Le portate Q_1, Q_r e Q_2 sono in regime di moto turbolento, Q_3 è in regime di moto laminare.
Consideriamo costanti i volumi V_1 e V_2 poiché molto maggiori rispetto alla differenza creata dal movimento dell'elemento mobile (tali volumi tengono conto anche dell'olio racchiuso dentro le tubazioni, tra mandata della pompa e valvola e dalla valvola allo scarico).



Modello non lineare

Analisi transiente

Per costituire il modello a parametri concentrati, possiamo utilizzare:

Seconda legge di Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ [1]

Equazione di continuità: $Q_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt}$ [2]

Efflusso turbolento: $Q = C_d \cdot A(x) \cdot \sqrt{\frac{2|\Delta P|}{\rho}} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta P)$ e $v = C_v \cdot \sqrt{\frac{2|\Delta P|}{\rho}} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta P)$ [3,4]

La funzione sgn(x) vale 0 se x = 0, altrimenti $\frac{x}{|x|}$.

La **funzione d'area A(x)** dell'otturatore conico è:

$$A(x) = \pi \cdot x \cdot [D - x \cdot sen\alpha \cos\alpha] \cdot sen\alpha \quad [5]$$

Applichiamo quindi la seconda legge di Newton all'elemento mobile. Agiscono le seguenti forze:

1. forza di superficie $P_1 \cdot A_F$ (in cui $A_F = \pi \cdot D^2/4$);
2. forza di superficie $P_3 \cdot A_F$;
3. forza elastica $-k \cdot (x_P + x)$ in cui x_P è il precarico (che vale, $|F_0| = k \cdot x_p$);
4. forze di flusso F_{Fl} (limitatamente alla componente stazionaria si ha $F_s = -\rho \cdot Q_r \cdot v_r \cdot \cos\alpha$);
5. forze d'attrito F_A.

Quindi, la seconda legge di Newton applicata all'elemento mobile è:

$$m\ddot{x} = P_1(t)A_F - P_3(t)A_F - k(x_P + x) + F_{Fl} + F_A \quad [6]$$

Per la forza d'attrito F_A, ci limitiamo a considerare la forza d'attrito viscoso: se L è il tratto "accoppiato" tra elemento mobile e cavità (di diametro nominale D_v) in cui è presente un gioco radiale C_r, in modo tale da definire l'area $A_T = \pi \cdot D_v \cdot L$, se μ è la viscosità dinamica, la forza d'attrito viscoso vale:

$$F_A = -\mu A_T \frac{\dot{x}}{C_r} = -K_F \cdot \dot{x} \quad [7]$$

Equazioni di continuità:

Volume 1: Q_1 entrante, Q_r uscente, quindi,

$$Q_1 - Q_r = \dot{V}_1 + (V_1/\beta) \cdot \dot{p}_1 \rightarrow \dot{p}_1 = (\beta/V_1) \cdot (Q_1 - Q_r).$$

Volume 2: Q_r e Q_3 entrante, Q_2 uscente, quindi:

$$Q_r + Q_3 - Q_2 = \dot{V}_2 + (V_2/\beta) \cdot \dot{p}_2 \rightarrow \dot{p}_2 = (\beta/V_2) \cdot (Q_r + Q_3 - Q_2)$$

Volume 3: Q_3 uscente, quindi: $-Q_3 = \dot{V}_3 + (V_3/\beta) \cdot \dot{p}_3 \rightarrow \dot{p}_3 = -(\beta/V_3) \cdot (Q_3 + \dot{V}_3).$

Calcoliamo dV_3/dt considerando che all'istante t l'altezza del cilindro di fluido del volume 3 ha una certa altezza $z(t) = x_c - x(t)$ mentre un istante dopo l'altezza $z(t+\Delta t) = x_c - x(t+\Delta t)$, quindi:

$$\left.\frac{dV_3}{dt}\right|_t = \lim_{h\to 0}\frac{V_3(t+h) - V_3(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{A_v \cdot z(t+h) - A_v \cdot z(t)}{h} = A_v \lim_{h\to 0}\frac{x(t) - x(t+h)}{h} = -A_v \frac{dx}{dt}$$

Le portate sono:

$$Q_r = K \cdot A(x)\sqrt{|p_1 - p_2|} \cdot \mathrm{sgn}(p_1 - p_2),\ Q_2 = K_2 \cdot \sqrt{|p_2 - p_T|} \cdot \mathrm{sgn}(p_2 - p_T)$$

e

$$Q_3 = H_3 \cdot (p_3 - p_2) + \frac{\pi \cdot D_v \cdot C_r}{2}\frac{dx}{dt}$$

Otteniamo un **sistema di equazioni differenziali di secondo grado non lineare non omogeneo**:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{p_1(t)A_F - p_3(t)A_F - k(x_P + x) + F_{Fl} + F_A}{m} \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{\beta}{V_1}(Q_1 - Q_r) \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{\beta}{V_2}(Q_r + Q_3 - Q_2) \\ \dfrac{dp_3}{dt} = -\dfrac{\beta}{V_3}\left(Q_3 + \dfrac{dV_3}{dt}\right) \end{cases} \qquad [8]$$

Uno schema a blocchi funzionali capace di risolvere numericamente il problema è qui rappresentato.

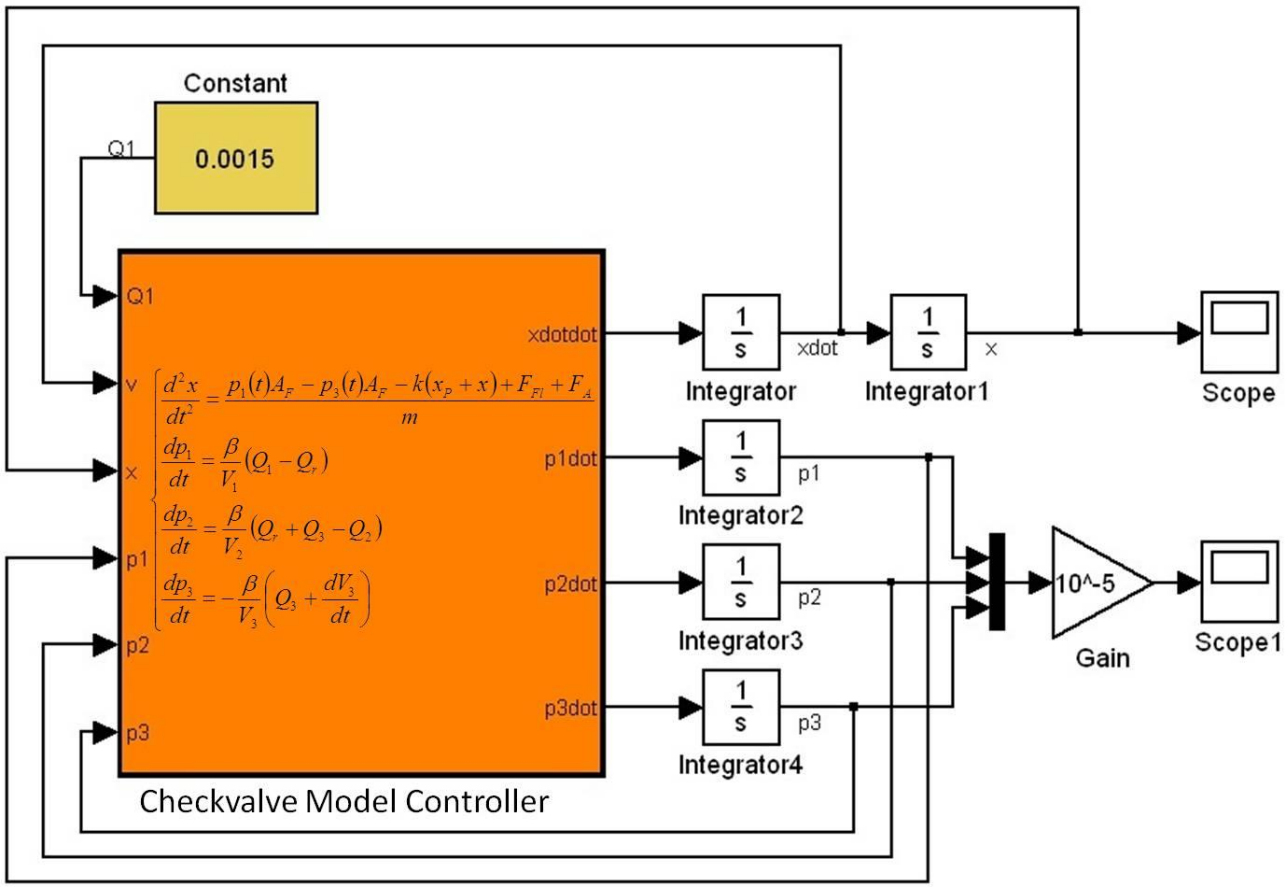


Fig. 2 - schema a blocchi del simulatore usato per la soluzione numerica.

Il grande blocco colorato in arancione è il **Checkvalve Model Controller** (**CMC**)..

Il sistema [8] non rappresenta da solo il modello matematico poiché il sistema reale è soggetto a condizionamenti, ad esempio, la variabile di stato x è condizionata dal fatto che esistono due fine corsa: uno superiore e uno inferiore. In pratica **si deve assicurare che $0 \le x \le x_{max}$**, altrimenti l'integrazione non termina una oscillazione completa (*anche con portate basse, basta $x < 0$*).

Senza questa funzione di controllo, il sistema non potrebbe quindi fornire dati corretti.

Il CMC controlla ed elabora il segnale d'ingresso, gestisce le variabili di stato calcolando il sistema [8] interpretando fenomeni come fine corsa, cavitazione... eccetera, e ne ritorna le derivate.

L'integrazione del sistema è invece affidata ad altrettanti blocchi integratori a valle del controller.

Il blocco giallo è un generatore di portata (*in questo caso costante ma in generale è una funzione del tempo*). Il tutto costituisce il **simulatore** della valvola che s'intende studiare.

La simulazione calcola e mostra l'andamento mostrato in figura per la portata Q = 90 L/min (0.0015 m^3/s).

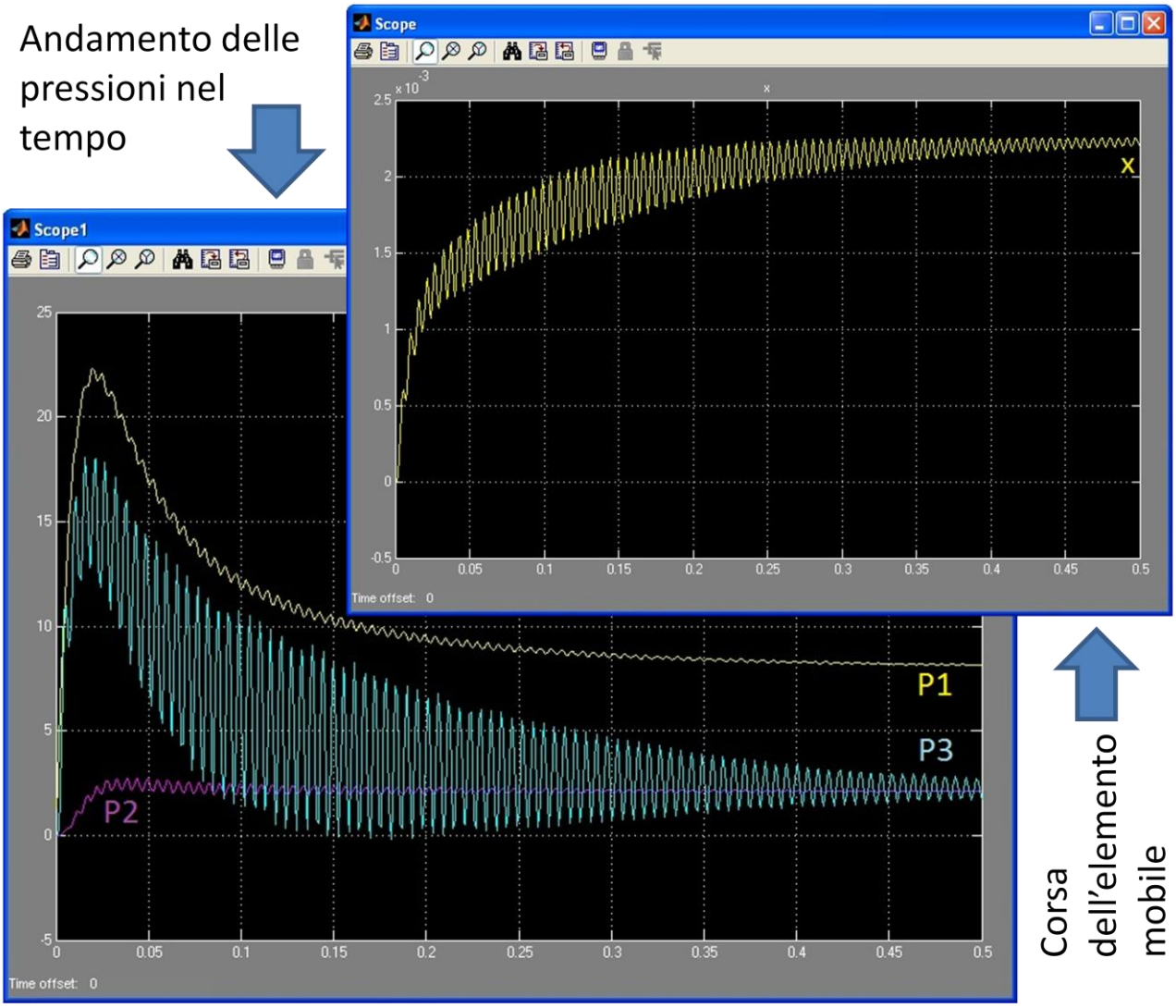


Fig. 3 - andamento delle pressioni P_1, P_2, P_3 e "corsa" x dell'elemento mobile con Q = 90 L/min.

Si nota come dopo un periodo transitorio i valori delle variabili di stato si vanno a stabilizzare in punti "statisticamente costanti", noti come **soluzione all'equilibrio del sistema** [8].
In pratica vuol dire che, se non cambia il segnale d'ingresso per un tempo sufficiente, oltre al tempo transitorio, la risposta che il sistema assume sistema diviene "statisticamente costante", in "equilibrio".
Altra considerazione sul comportamento della valvola è che presenta un $\Delta P = P_1 - P_2$ contenuto (circa 5 o 6 bar).
Inoltre, l'elemento mobile si stabilizza presto, senza grandi oscillazioni, ad un valore che è ancora lontano dal fine corsa.

Simuliamo ora il caso in cui la portata è esagerata per la taglia della valvola.
Ci attendiamo una grande corsa dell'elemento mobile, tanto da raggiungere il fine corsa meccanico e quindi, dovremmo vedere l'elemento mobile, "sparato" sul fine corsa (alla quota massima di 5mm), e la sezione d'efflusso agire come strozzatore fisso dato che non può aprirsi ulteriormente e quindi una pressione molto alta.
Simulazione con Q = 500 L/min.

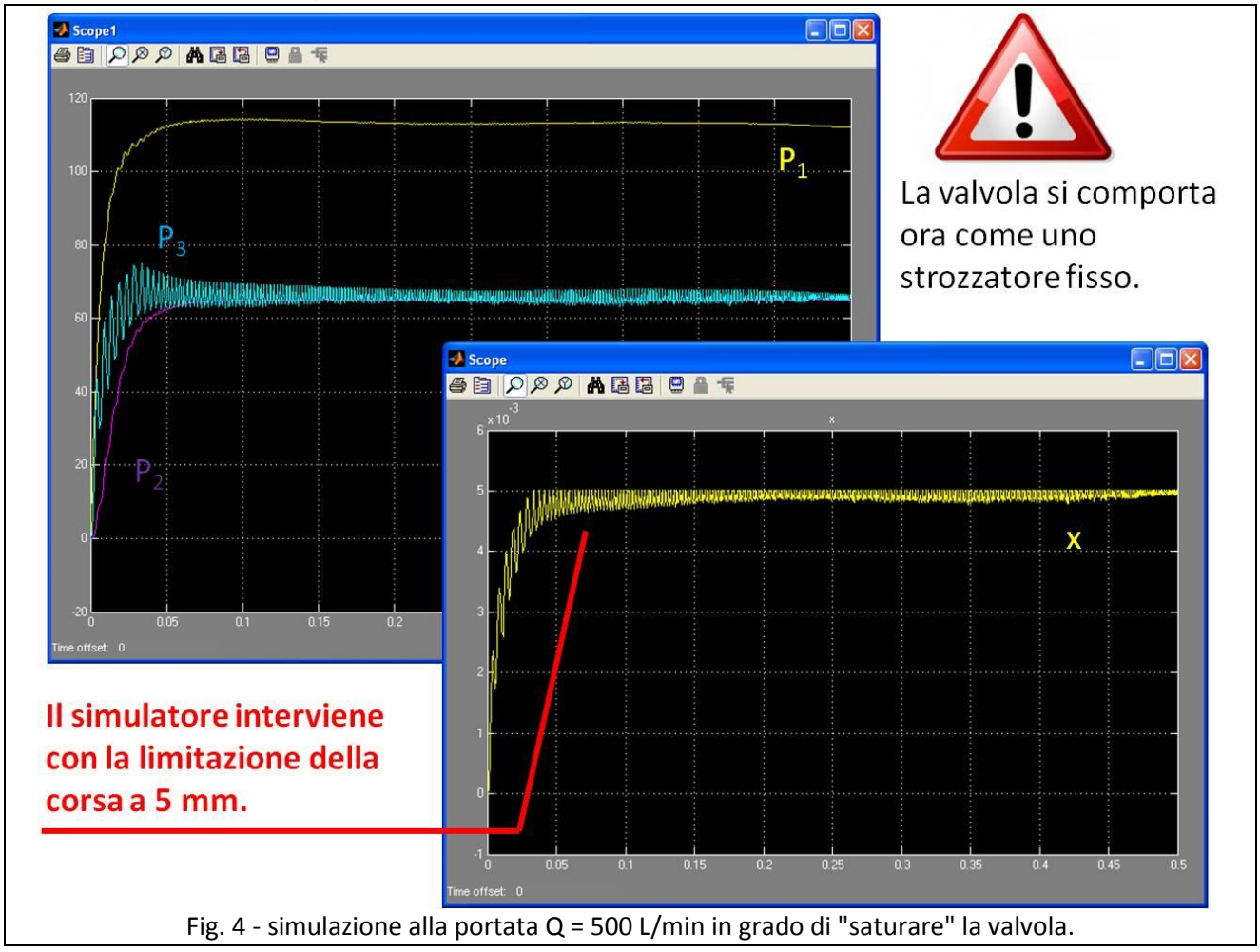


Fig. 4 - simulazione alla portata Q = 500 L/min in grado di "saturare" la valvola.

Il CMC si rende conto che viene raggiunto il fine corsa a 5 mm e interviene.
Il controller "guida" la soluzione del sistema facendolo rientrare nei parametri corretti.
Da un punto di vista matematico, il sistema [8] fornirebbe ugualmente un risultato ma non sarebbe corrispondente al vero.
Risulta evidente che in queste condizioni la valvola non ha un comportamento soddisfacente, poiché, pur mantenendo la propria funzionalità, sono necessari 100 kW per vincere la resistenza del fluido, quindi dissipa circa 100 volte di più. La mandata della pompa arriva quasi a 120 bar unicamente per far girare dell'olio. Figuriamoci se utilizzassi la valvola a monte di un carico.

Per concludere l'analisi transiente, vediamo il caso con Q "pulsante" tra un valore massimo e zero.

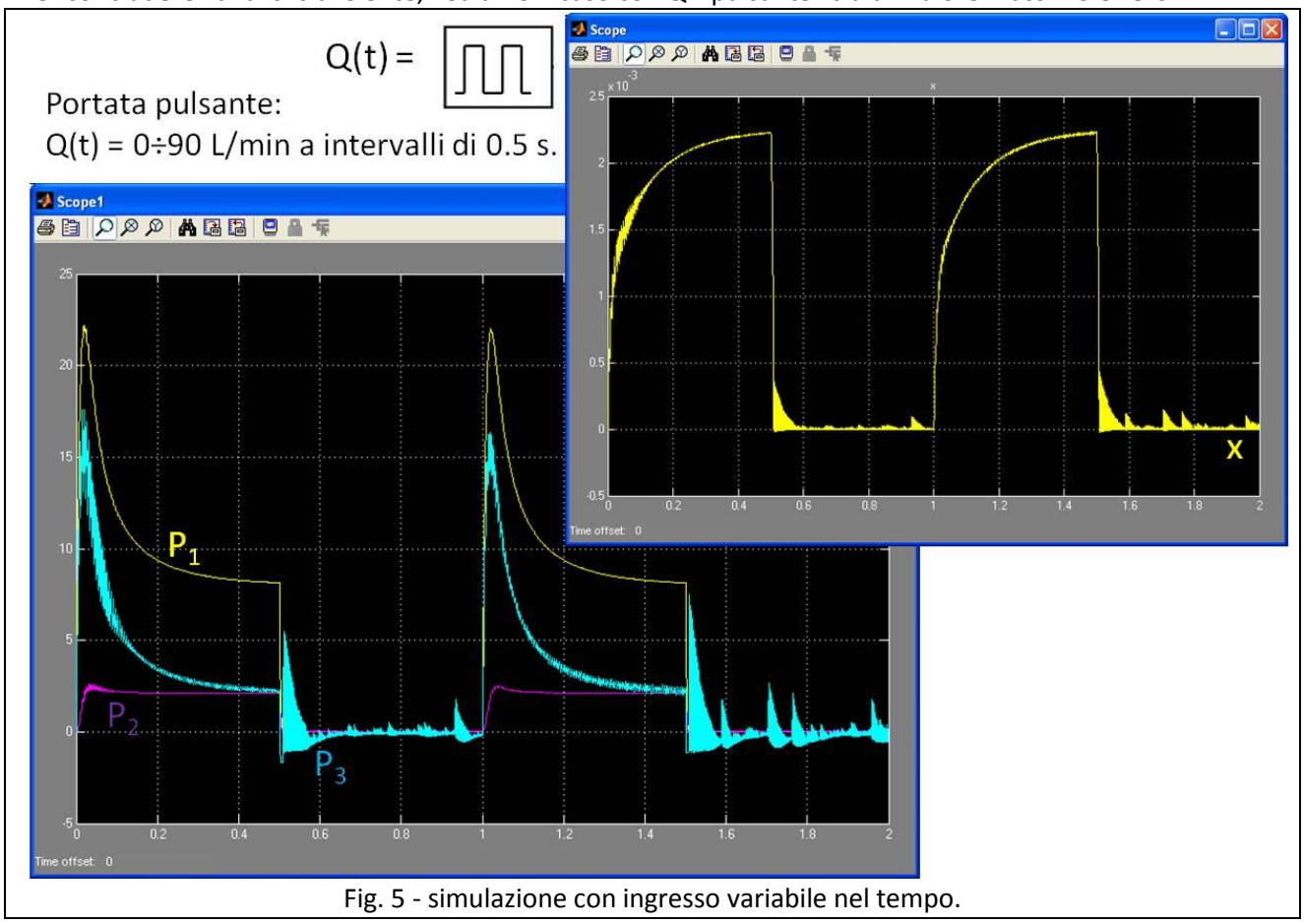


Fig. 5 - simulazione con ingresso variabile nel tempo.

Quando la portata scende di colpo, c'è una istantanea caduta della pressione alla mandata della pompa, e naturalmente l'elemento mobile accompagna questa discesa raggiungendo la nuova posizione corrispondente al nuovo valore di portata.
La discesa improvvisa dell'elemento mobile, associata a un ridotto gioco della camicia nella sede va a creare cavitazione nella camera del vano molla (3), come evidenzia P_3 tra $0.5 \le t \le 1$ e $1.5 \le t \le 2$.
E' evidente l'intervento del CMC per non far scendere mai la pressione sotto lo zero assoluto.
Il modello matematico avrebbe certamente prodotto valori di P_3 ben al di sotto di tale soglia.
La cavitazione è una criticità e potrebbe portare ad allargare il gioco tra elemento mobile e cavità.
Tuttavia allargare il gioco significa minore smorzamento e quindi si potrebbe avere una valvola rumorosa.
Il problema non sarebbe evidente limitandoci ad un'analisi all'equilibrio, ma soprattutto **con la simulazione posso prevedere il funzionamento della valvola modificando i parametri prima di produrre un prototipo**.
Naturalmente i prototipi si devono realizzare ugualmente, dato che **i modelli matematici non possono rilevare tutti gli eventuali problemi visibili al banco prova (o nell'impianto), tuttavia, nel caso vi siano più ipotesi di valvole da realizzare, forse la simulazione può aiutare a scartare quelle che hanno minore probabilità di successo e a dedicarsi alla altre**, concentrando investimenti e sforzi.

Curva caratteristica stazionaria

Nella pratica oleodinamica, nella maggior parte dei casi saremo interessati soltanto a conoscere i punti di equilibrio. **In pratica, si vuole il più delle volte, rispondere alla domanda secca - "Qual'è il ΔP quando Q vale... ?"**. Negli impianti infatti, sono ricorrenti "valori di portata statisticamente costanti" applicati per tempi ben più lunghi del transitorio, nel quale si desiderano che le fasi di lavoro siano eseguite a velocità costante per cui, **la risposta del sistema è in pratica "costante", all'equilibrio**.
Con derivate temporali nulle, il sistema [8] si trasforma quindi nel seguente sistema algebrico non lineare:

$$\begin{cases} A_F \cdot \Delta P - k \cdot x + F_{FL} - F_0 = 0 \\ Q_r = C_d \cdot A(x) \cdot \sqrt{\dfrac{2}{\rho} \Delta P} \end{cases} \qquad [9]$$

Non è tuttavia semplice trovarne la soluzione analitica: appena vado a sostituire A(x) e le forze di flusso stazionarie ci torna in mente perché è complicato lavorare con equazioni non lineari, infatti diventa:

$$\begin{cases} \left[A_F - 2\pi \sin\alpha \cos\alpha\, C_d C_v x\left(D - x \sin\alpha \cos\alpha\right)\right] \cdot \Delta P - kx - F_0 \\ \Delta P = \dfrac{{Q_r}^2 \cdot \rho}{2\pi^2 \sin^2\alpha\, {C_d}^2 x^2 \left(D - x \sin\alpha \cos\alpha\right)^2} \end{cases}$$

Si possono però trovare soluzioni numeriche. Risolto il sistema nei punti **Q = { 0, 15, 30, 45, 60, 90 } L/min**, ottengo **la caratteristica stazionaria della valvola**.

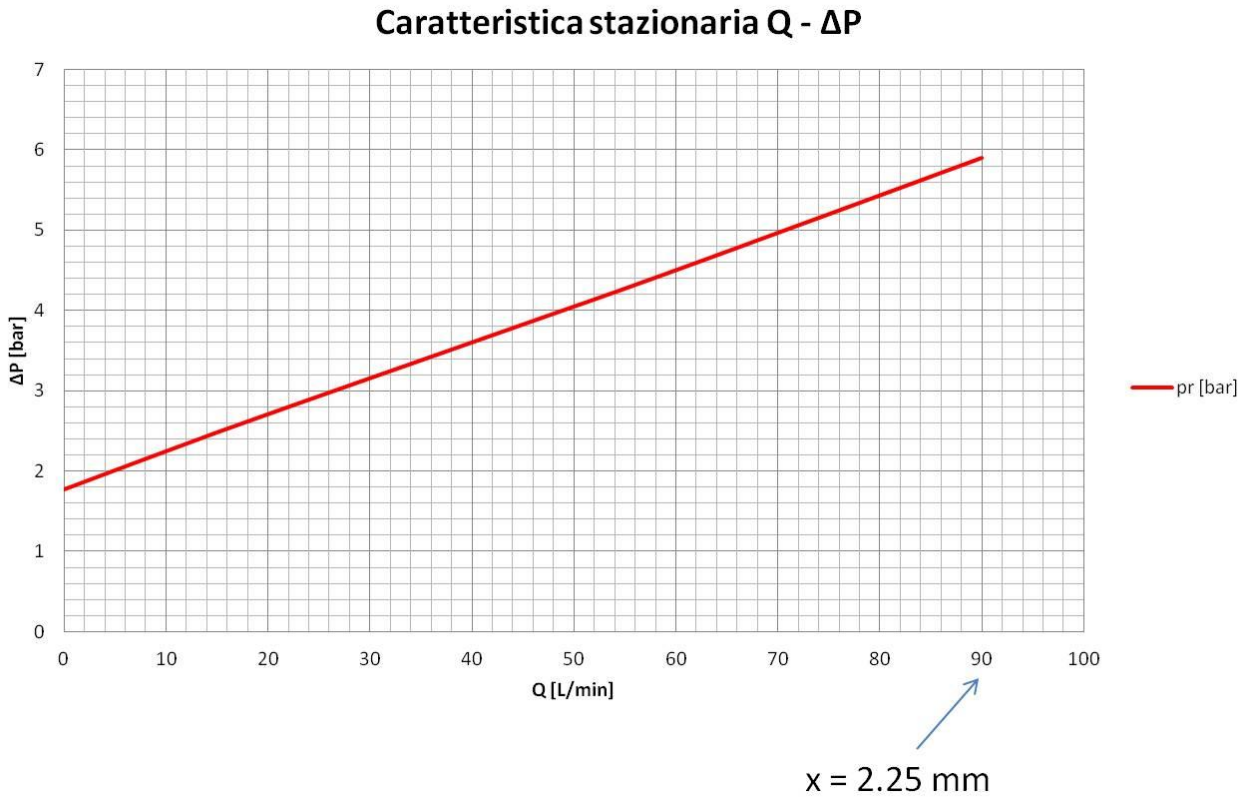


Fig. 6 - la caratteristica stazionaria altro non è che la soluzione del sistema [9].

Attenzione: il sistema [9] non si avvale del CMC come il simulatore; se ci si limita a un calcolo puramente "matematico", si rischia di non essere "collegati" al sistema fisico. Ad esempio, per Q = 500 L/min (abbiamo visto in fig. 4 il ruolo del CMC), ottengo dal sistema [9], ΔP ≈ 21 bar e x ≈ 10 mm, cosa che come sappiamo è impossibile per il nostro sistema fisico. Viceversa per valori coerenti fornisce risultati corretti all'equilibrio.



Se proprio volessimo una soluzione analitica per il sistema algebrico, una volta realizzato che sono A(x) e le forze di flusso a creare problemi, di fatto anticipiamo l'argomento del prossimo paragrafo ricorrendo a opportune sostituzione, che sebbene introducano approssimazioni, garantiscono anche semplificazioni importanti per arrivare a formulare risultati in forma chiusa.

Ad esdempio, possiamo osservare che **$A(x) \approx w \cdot x$**, e che la somma della forza della molla e della forza di flusso (stazionaria) è circa uguale a **$K_e \cdot x$**, dove **K_e** è un coefficiente equivalente che tiene conto della costante elastica della molla e delle forze di flusso.

Tale coefficiente vale **$K_e = k+2\pi \cdot Cd \cdot Cv \cdot D \cdot \sin\alpha \cos\alpha \cdot p_s$** , dove p_s una pressione ricavata dalla caratteristica stazionaria in corrispondenza di una portata d'interesse.

Ad esempio p_s può essere quei 5.9 bar che si ottengono quando Q = 90 L/min..

Sotto queste ipotesi semplificative, il sistema diventa:

$$\begin{cases} A_F \cdot \Delta P - K_e \cdot x - F_0 = 0 \\ \Delta P = \dfrac{\rho \cdot Q_r^{\,2}}{2C_d^{\,2} w^2 x^2} \end{cases}$$

Che conduce, per sostituzione all'equazione algebrica:

$$A_F \cdot \frac{\rho \cdot Q_r^{\,2}}{2C_d^{\,2} w^2 x^2} - K_e \cdot x - F_0 = 0$$

Già posto l'ovvio $x \neq 0$, chiamiamo $z = 2^{-1} \cdot A_F \cdot Q_r^{\,2} \cdot \rho \cdot C_d^{-2} \cdot w^{-2}$ e moltiplico tutto per x^2, così da ottenere:

$$K_e x^3 + F_0 x^2 - z = 0 \rightarrow x^3 + \psi x^2 - \xi = 0$$

E' una **equazione cubica**[1], la soluzione analitica è nota. Non la risolverò perché non aggiunge altro alla discussione, tra l'altro, una volta sostituiti all'indietro i parametri d'interesse, cioè se volessimo far comparire nella soluzione i parametri hardware A_F, K_e, F_0... diventerebbe chilometrica.

[1] Il primo matematico che risolse l'equazione cubica fu ***Scipione Del Ferro*** (1456 - 1526), probabilmente con la collaborazione di ***Luca Bartolomeo de Pacioli***, ma non pubblicò la scoperta. In punto di morte rivelò la scoperta al suo allievo Antonio Maria Fior, che lanciò una pubblica sfida ad uno studioso bresciano, ***Niccolò Fontana*** (1499 - 1557), detto ***Tartaglia*** per una balbuzie causata da ferite riportate da bambino durante il sacco di Brescia; Fior propose 30 equazioni che Niccolò Fontana risolse brillantemente mettendo a punto un metodo di risoluzione che non rivelò. ***Gerolamo Cardano*** (1501-1576) si fece rivelare il metodo con la promessa di mantenerne il segreto. Del Ferro e Tartaglia risolsero l'equazione cubica nel caso particolare in cui mancasse il termine quadratico. Cardano la estese a tutti gli altri casi ma, basandosi sui risultati ottenuti da Niccolò Fontana, per tenere fede alla promessa fatta, anch'egli rinunciò alla pubblicazione, fino al 1543, quando, dall'esame dei manoscritti lasciati da Del Ferro fu trovata la soluzione dalla quale tutto il lavoro di Cardano si sviluppava. Sentendosi quindi sollevato dalla promessa, nel 1545, Cardano pubblicò il suo capolavoro matematico "Ars Magna", nel quale, all'undicesimo capitolo riportava la soluzione generale dell'equazione cubica.



Modello lineare

Linearizzazione

Abbiamo visto i problemi di dover maneggiare equazioni non lineari.
L'importanza dei sistemi lineari deriva da una serie di considerazioni pratiche:

- Sono **più facili da studiare**.
- Un modello lineare può rivelare con buona approssimazione il comportamento di numerosi sistemi reali purché siano sottoposti a piccoli ingressi (o piccole variazioni del valore d'ingresso).

Il secondo punto è interessante perché, sotto certe condizioni, possiamo considerare il nostro sistema come se fosse lineare, sfruttandone i benefici.
Tale approccio è basato sulla **linearizzazione del sistema nell'intorno di uno stato di equilibrio d'interesse**.
Al sistema così ottenuto è dunque possibile applicare le tecniche d'analisi tipiche dei sistemi lineari.
Nel paragrafo precedente, quando si cercava a tutti i costi una formula analitica per trovare x e il ΔP, di fatto abbiamo sostituito A(x), formula complessa non lineare, con w·x, e lo stesso si è fatto con K_e.
Il principio base è che tutte le espressioni che rendono una o più equazioni del sistema, non lineari, vengano sostituite da una serie di Taylor troncata dopo il primo termine differenziale.
Ecco che la generica equazione non lineare che descrive la portata attraverso una valvola $Q_L(x,p_L)$ diventa:

$$Q_L\left(x_0+\Delta x,\, p_{L0}+\Delta p_L\right) \approx Q_L\left(x_0,\, p_{L0}\right) + \Delta x \cdot \left.\frac{\partial Q_L}{\partial x_v}\right|_{p_{L0}=k} + \Delta p \cdot \left.\frac{\partial Q_L}{\partial p_L}\right|_{x_0=k} \qquad [10]$$

Si è soliti chiamare:

$$K_q = \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \quad \text{e} \quad K_c = -\frac{\partial Q_L}{\partial p_L}$$

Il primo termine prende il nome di Flow Gain Coefficient (**K_q**), il secondo è detto Pressure Coefficient (**K_c**).

Per mia comodità userò per la portata l'espressione linearizzata seguente:

$$\boxed{Q_{lin} = K_C \cdot p + K_Q \cdot x + Q_{L0}} \qquad [11]$$

con:

$$\left.\begin{aligned} K_c &= \pi \cdot \sin\alpha \cdot C_d \cdot \sqrt{\frac{1}{2\rho \cdot p_S}} \cdot x_0 \cdot \left(D - x_0 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha\right) \\ K_q &= \pi \cdot \sin\alpha \cdot C_d \cdot \sqrt{\frac{2p_S}{\rho}} \cdot \left(D - 2x_0 \cdot \sin\alpha\cos\alpha\right) \\ Q_{L0} &= \pi \cdot \sin\alpha \cdot C_d \cdot \sqrt{\frac{p_S}{2\rho}} \cdot x_0 \cdot \left(3x_0 \cdot \sin\alpha\cos\alpha - D\right) \end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

attenzione che la [12] vale soltanto per la particolare geometria conica.

Valvola linearizzata

Con riferimento al sistema di equazioni differenziali [8], **definiamo $p_L = p_1 - p_2$, la pressione che agisce sull'elemento mobile e la portata media elaborata da quest'ultimo come $Q_L = (Q_1 + Q_2) / 2$, in pratica semplifichiamo come se ci fosse una unica portata $Q_1 = Q_r = Q_2 = Q_L$ che attraversa l'elemento mobile**, perciò:

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{dp_2}{dt} = \frac{dp_L}{dt} = \frac{2\beta}{V_t}\left(Q_1 + Q_2 - 2Q_r\right) = \frac{4\beta}{V_t}\left(\frac{Q_1 + Q_2}{2} - Q_r\right) = \frac{4\beta}{V_t}\left(Q_L - Q_r\right) \qquad [13]$$

dove $V_t = V_1 + V_2$. Sostituiamo alla portata Q_r la forma linearizzata, quindi il sistema [8] diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{A_F \cdot p_L - K_e \cdot x - K_F \cdot \dot{x} - F_0}{m} \\ \dfrac{dp_L}{dt} = -\dfrac{4\beta \cdot K_C}{V_t} \cdot p_L - \dfrac{4\beta \cdot K_Q}{V_t} \cdot x + \dfrac{4\beta}{V_t}\left(Q_L - Q_{L0}\right) \end{cases} \qquad [14]$$

Sostituisco con: $h_1 = A_F/m$, $h_2 = K_e/m$, $h_3 = K_F/m$ e $h_4 = F_0/m$, inoltre $g_1 = 4\cdot\beta\cdot K_C/V_t$, $g_2 = 4\cdot\beta\cdot K_Q/V_t$, $g_3 = 4\cdot\beta\cdot Q_L/V_t$, $g_4 = 4\cdot\beta\cdot Q_{L0}/V_t$. Il sistema da risolvere diventa quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = h_1 \cdot p_L - h_2 \cdot x - h_3 \cdot \dot{x} - h_4 \\ \dfrac{dp_L}{dt} = -g_1 \cdot p_L - g_2 \cdot x + g_3 - g_4 \end{cases} \qquad [15]$$

Che può essere scritto come sistema lineare di primo grado

$$Y' = A\cdot Y + B \qquad [15b]$$

dove

$$Y' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{p}_L \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -h_2 & -h_3 & h_1 \\ -g_2 & 0 & -g_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ v \\ p_L \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -h_4 \\ g_3 - g_4 \end{pmatrix}$$

La matrice **A** coincide con la matrice Jacobiana J:

$$A \equiv J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_1}{\partial p_L} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial p_L} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial p_L} \end{pmatrix}$$

Se prendiamo un punto di equilibrio noto, es. $X_E = \{ x_e = 0, v_e = 0, p_e = p_0 \}$ e sostituiamo, abbiamo:

$$J(X_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -108529.607 & -0.735 & 5.655\cdot10^{-4} \\ -1.389\cdot10^{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha autovalori $\lambda_{1,2} = 441.5 \pm i\cdot833$ e $\lambda_3 = -883.7$. **Abbiamo autovalori a parte reale positiva, quindi questo sistema è instabile** (primo criterio di Lyapunov).

Non riusciamo a sostituire il sistema [8] con il [15] poiché piccole variazioni nelle variabili di stato producono grandissime variazioni nella soluzione (la matrice è mal condizionata), in particolare il problema è la pressione, che con volumi piccoli e bulk modulus molto grande, non consentono le approssimazioni della linearizzazione.

Soluzioni stazionarie

Poiché la matrice **A** è invertibile, il sistema ha una soluzione vettoriale unica w costante che soddisfa w' = A·w + B = 0, nota come **soluzione stazionaria** (o **soluzione all'equilibrio**), tale soluzione vale:

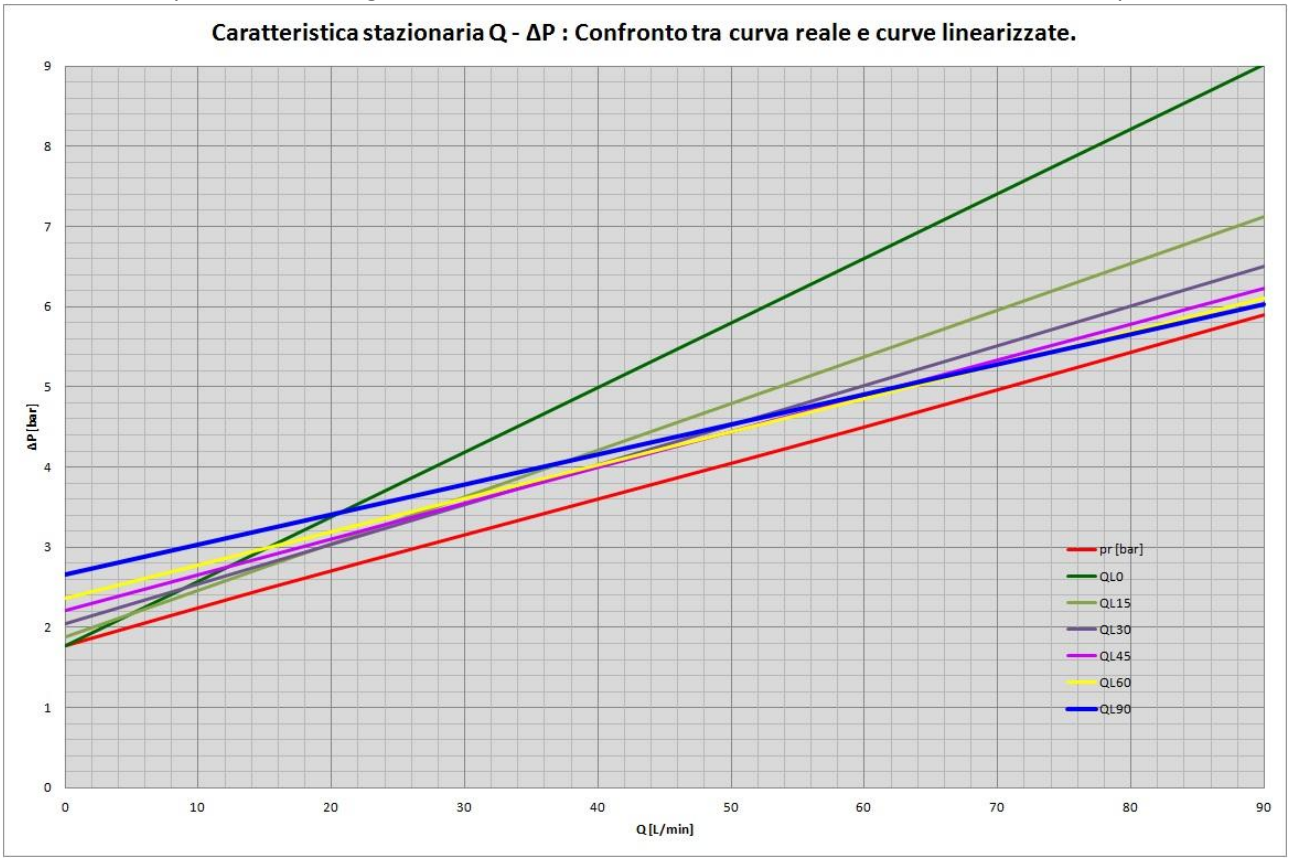
$$w = A^{-1}(-B) = \begin{pmatrix} -\frac{g_1 \cdot h_3}{D} & -\frac{g_1}{D} & -\frac{h_1}{D} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{g_2 \cdot h_3}{D} & \frac{g_2}{D} & -\frac{h_2}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h_4 \\ g_4 - g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(g_3 - g_4)\cdot h_1 - g_1 \cdot h_4}{D} \\ 0 \\ \frac{g_2 \cdot h_4 + (g_3 - g_4)\cdot h_2}{D} \end{pmatrix}$$

con $D = g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1$, che in pratica corrisponde a:

[16] $$P_L = \frac{K_e \cdot (Q_L - Q_{L0}) + K_q \cdot F_0}{A_F K_q + K_C K_e}$$ e $$x = \frac{A_F \cdot (Q_L - Q_{L0}) + K_C \cdot F_0}{A_F K_q + K_C K_e}$$ [17]

Sono soluzioni stazionarie (o all'equilibrio) del sistema linearizzato.

Possiamo dunque ottenere un grafico con la curva reale in confronto alle curve linearizzate in punti diversi.



La curva rossa è quella non lineare, quindi varie curve linearizzate in punti diversi, le più significative:

- QL0 approssima molto bene la prima fase d'entrata in regolazione della valvola (a portate molto basse), è importante per lo studio della stabilità dei sistemi.
- QL45÷QL90: sono linearizzazioni "*a tutto campo*" più o meno vanno da 0.5 a 1 volta il valore massimo di riferimento; "sbagliano" ma in modo "accettabile", rispetto al valore corretto.

Un vantaggio del sistema linearizzato è che indipendentemente dalla scelta che facciamo sul punto in cui linearizziamo, le formule rimangono sempre la 16 e la 17. In pratica basta scegliere soltanto i valori di dei tre parametri della linearizzazione K_C, K_q e Q_{L0} sulla base di quello che ci conviene.



Curva stazionaria

Visto che il sistema [15] è instabile e che la principale causa d'instabilità è la difficoltà di calcolare con precisione la seconda equazione, manteniamo l'equazione dinamica dell'elemento mobile (la prima) ma semplifichiamo la seconda sostituiamo alla pressione i suoi valori all'equilibrio rispetto al volume e al bulk modulus, in pratica, poniamo $dp_L/dt = 0$ (per questo si parla di curva stazionaria, ma in realtà otteniamo corse e pressioni variabili nel tempo). *Il significato di questa curva non è quello di comprendere "esattamente" cosa accade alla pressione e alla corsa in un dato istante quanto quello di descrivere l'adattamento della soluzione stazionaria al variare dell'ingresso*.

Se $\mathcal{L}$-trasformiamo il sistema [14] con le considerazioni appena fatte, otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X(s) = A_F \cdot P_L(s) - K_e \cdot X(s) - K_F \cdot s \cdot X(s) - \dfrac{F_0}{s} \\ Q_L(s) = K_c \cdot P_L(s) + K_q \cdot X(s) + \dfrac{Q_{L0}}{s} \end{cases} \qquad [18]$$

Ricavo $P_L(s)$ dalla seconda e lo sostituisco nella prima, ottenendo:

$$K_c \cdot m \cdot s^2 \cdot X(s) + K_c \cdot K_F \cdot s \cdot X(s) + \left(A_F \cdot K_q + K_c \cdot K_e\right) \cdot X(s) = A_F \cdot Q_L(s) - \frac{1}{s}\left(A_F \cdot Q_{L0} + K_c \cdot F_0\right)$$

con $a_2 = K_c \cdot m$, $a_1 = K_c \cdot K_F$ e $a_0 = A_F \cdot K_q + K_c \cdot K_e$, la frequenza propria dell'elemento mobile:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \qquad [19]$$

e lo smorzamento:

$$\xi = \frac{a_1}{2 \cdot \sqrt{a_0 \cdot a_2}} \qquad [20]$$

Per la soluzione del sistema [18] lo rendo omogeneo con la sostituzione $P_D = P_L - P_0$.

$$\begin{cases} ms^2 X(s) = A_F \cdot P_D(s) - K_e \cdot X(s) - K_F \cdot s \cdot X(s) \\ Q_L(s) = K_c \cdot P_D(s) + K_q \cdot X(s) \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{A_F}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot Q_L(s) \\ P_D(s) = \dfrac{ms^2 + K_F \cdot s + K_e}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot Q_L(s) \end{cases}$$

I rapporti $X(s)/Q_L(s)$ e $P_D(s)/Q_L(s)$ sono le **funzioni di trasferimento** del sistema.

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{Q_L(s)} = \frac{A_F}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad [21]$$

e

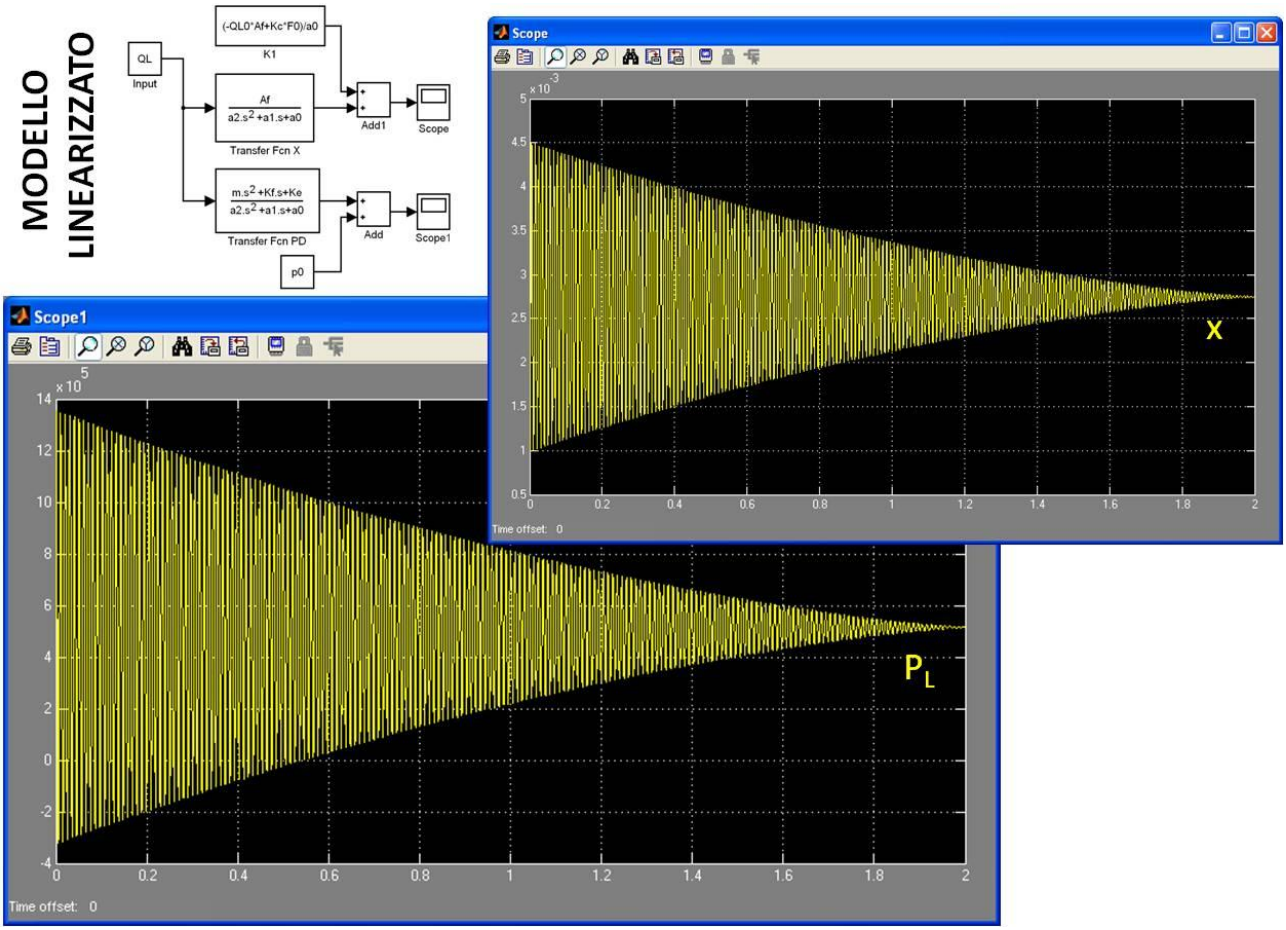
$$G_2(s) = \frac{P_D(s)}{Q_L(s)} = \frac{ms^2 + K_F \cdot s + K_e}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad [22]$$

Queste F.d.T. si riferiscono a un sistema omogeneo, diverso dal nostro. Grazie alla linearità del sistema, possiamo applicare la **sovrapposizione degli effetti** per cui, la soluzione che cerchiamo è la soluzione del sistema omogeno più una soluzione particolare del sistema non omogeono, ad edempio, a $P_D(t)$ sarà sufficiente aggiungere p_0.

Per calcolare $x(t)$ e $P_L(t)$ è sufficiente processare $Q_L(t)$ dentro due blocchi funzionali con le F.d.T. G_1 e G_2, quindi, aggiungere le costanti d'integrazione ottenute con la sovrapposizione degli effetti.

Il risultato è mostrato nella prossima pagina.

Si è integrato per 2 secondi per far vedere che rispetto al modello reale la convergenza è più lenta ma più o meno la si raggiunge per gli stessi valori stazionari di x e P_L.

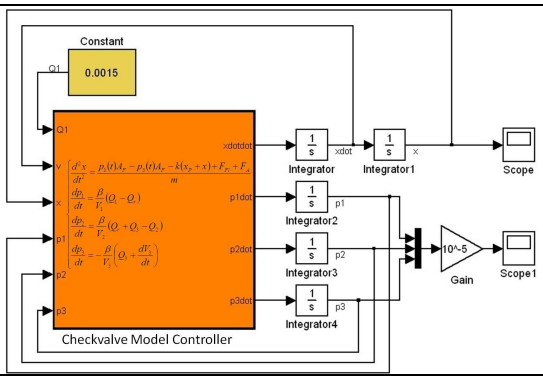
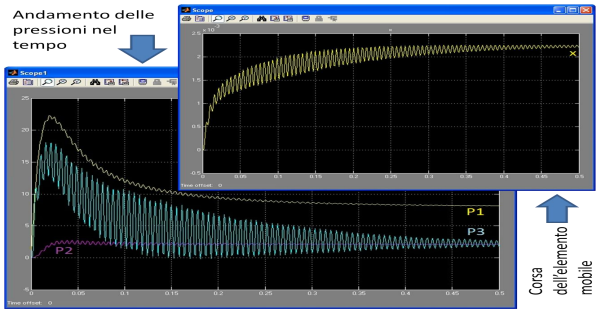
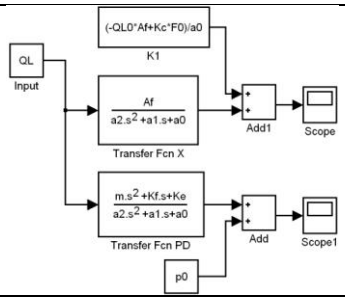
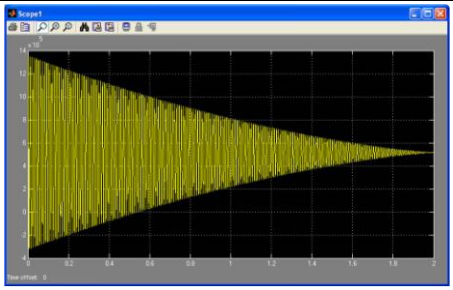
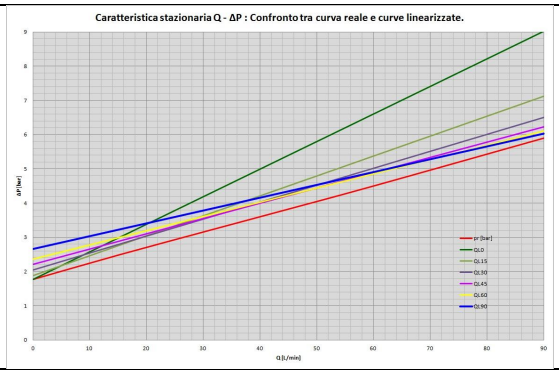


E' ovvio che non possiamo confrontare il risultato con quello del modello non lineare.
Il fatto che manchi poi un controller (tipo il CMC) non impedisce la presenza di situazioni non corrispondenti alla realtà come punti in cui la pressione è minore a -1 bar (cioè sotto lo zero assoluto).
Purtroppo questo è un modello, quindi una rappresentazione, non la realtà: tuttavia è indubbio che il sistema lineare ci restituisce la maggior parte delle informazioni d'interesse come la frequenza propria del sistema, lo smorzamento, i valori cui le variabili di stato convergono nel tempo (e quindi le soluzioni stazionarie), insomma comunque anche senza ricorrere a un software la soluzione linearizzata, per quanto meno accurata del modello non lineare comunque risulta comoda.

Conclusioni

Abbiamo studiato una valvola secondo due approcci diversi: modello non lineare e modello linearizzato. **Il modello non lineare, basato sul calcolo numerico, fornisce (con la potenze delle CPU attuali) risultati molto accurati e vicinissimi alla realtà**: tuttavia questo tipo di modello non è semplice da implementare. Il secondo è semplificato, approssimato, ma restituisce i dati di principale interesse con errori il più delle volte "accettabili". Restituisce risultati utili per comprendere aspetti "peculiari" e non banali, ad esempio, con le formule [16] e [17] si calcolano le soluzioni stazionarie, con la [19] e la [20] la frequenza propria e il coefficiente di smorzamento dell'elemento mobile.

Ecco in pratica cosa si è fatto:

Modello non lineare	**Analisi transiente**
	
Modello linearizzato	**Analisi transiente**
	
Modello linearizzato	**Analisi stazionaria**
$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{p}_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -h_2 & -h_3 & h_1\\ -g_2 & 0 & -g_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\\ p_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -h_4\\ g_3-g_4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow P_L=\frac{K_e\cdot(Q_L-Q_{L0})+K_q\cdot F_0}{A_F K_q+K_C K_e}$ $\Rightarrow x=\frac{A_F\cdot(Q_L-Q_{L0})+K_C\cdot F_0}{A_F K_q+K_C K_e}$	

A seconda del livello di informazioni che si vogliono ottenere e degli sforzi che siamo disposti a fare, si può scegliere uno dei due metodi (o entrambi) per lo studio del comportamento di una valvola oleodinamica. Ovviamente tale metodologia è idonea anche allo studio di altre tipologie di valvole.

Paolo Ferraresi.

